

9. Некоторые следствия из принципа суперпозиции

В настоящем разделе мы приведем несколько элегантных результатов, которые следуют из принципа суперпозиции (26). Эти результаты помогут как глубже понять сам принцип, так и проникнуться парадоксальной красотой квантовой теории.

9.1. «Простое» классическое истолкование принципа суперпозиции

Начинающие изучать квантовую теорию, как правило, еще находятся в плену классических представлений и индуцированного этими представлениями «здорового смысла». Такие люди часто пытаются интерпретировать принцип суперпозиции (26) следующим, логичным с их точки зрения, образом. Заранее подчеркнем, что такая интерпретация *глубоко ошибочна*. Ниже в данном разделе мы приведем эксперименты, которые эту «классически логичную» интерпретацию опровергают.

Теперь сформулируем саму интерпретацию. Возьмем только одну микросистему. Конечно, мы не знаем, в каком из возможных состояний $|a_j\rangle$ данная конкретная микросистема **на самом деле**³⁰ находится **до измерения**. И мерой нашего незнания служит то, что мы не приписываем этой микросистеме конкретное состояние $|a_j\rangle$, а в духе классической статистической физики говорим, что микросистема может быть описана при помощи разложения (26). При этом с вероятностью w_j следует ожидать, что микросистема находится именно в состоянии $|a_j\rangle$. То есть в предложенной трактовке измерение переводит наше незнание об истинном состоянии системы в точное знание этого состояния. Очередной раз подчеркнем, что такая трактовка Постулатов №3 и №4 **принципиально ошибочна!** Откуда это следует?

Во-первых, несостоятельность предложенной выше трактовки ясно видна из проведенного в разделе 2 анализа прохождения поляризованных фотонов

³⁰Вот он, типичный стиль мышления «классического» физика! Если вы хотите постичь квантовый мир, то отучайтесь от подобных детерминистических формулировок.

через призму Николя. Напомним, что при объяснении этого эксперимента на основе классического корпускулярного подхода в параграфе 2.2 мы уже пытались встать на ту точку зрения, что каждый фотон еще до взаимодействия с николем находился в состоянии с определенной поляризацией. И пришли к противоречию.

Во-вторых, если принять предложенную выше трактовку принципа суперпозиции, то становятся невозможными опыты по интерференции и дифракции одиночных микрочастиц, аналогичные экспериментам А. Тономуры с коллегами [29] и Бибермана–Сушкина–Фабриканта [24].

Задача. С помощью принципа суперпозиции дайте качественные объяснения явлениям интерференции и дифракции.

Задача. Проследите связь между опытом Бибермана–Сушкина–Фабриканта и правильной трактовкой Постулатов №3 и №4.

В-третьих, существует очень красивый прямой эксперимент, который доказывает, что до измерения каждая отдельная микросистема находится в состоянии $|\psi\rangle$, а макроприбор производит редукцию этого состояния к одному из возможных макроскопически различимых состояний $|a_j\rangle$. Но прежде чем приступить к описанию этого эксперимента, нам надо построить теорию простейшего делителя света — полупрозрачного зеркала — и на основе этой теории дать матричное описание интерферометра Маха–Цандера.

9.2. Математическое описание полупрозрачного зеркала

Теорию полупрозрачного зеркала удобно строить в прямоугольной декартовой системе координат. Пусть такое зеркало расположено перпендикулярно плоскости (xy) , проходит через начало координат и повернуто под углом 45° к оси x , как показано на рис. 17. Введем дополнительное упрощение: падающие на зеркало фотоны могут лететь только вдоль оси x и/или вдоль оси y . В первом случае припишем падающему фотону вектор состояния $|x\rangle$. Во втором — вектор состояния $|y\rangle$. Поскольку зеркало тонкое, а угол падения равен углу отражения, то падающий вдоль оси x фотон с некоторой вероятностью прохо-

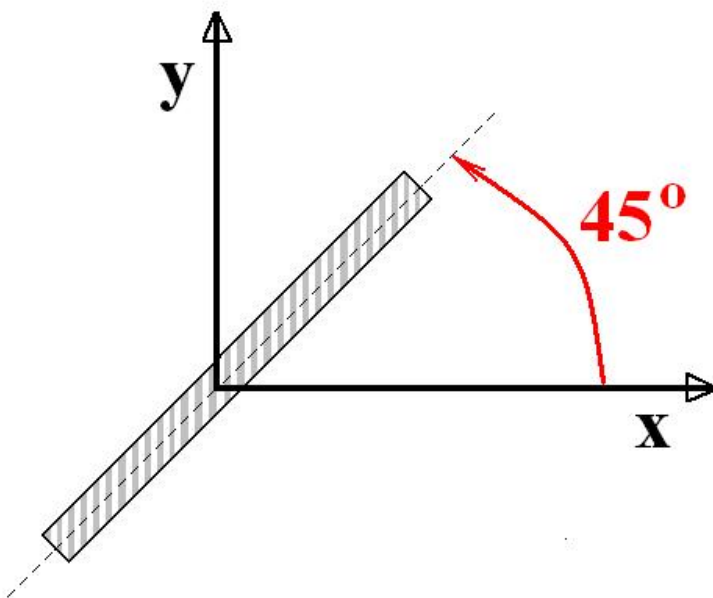


Рис. 17: Схематическое изображение полупрозрачного зеркала, расположенного перпендикулярно плоскости (xy) и под углом 45° к оси x

дит зеркало по оси x (чему отвечает вектор состояния $|x'\rangle$), а с некоторой — отражается вдоль оси y (сопоставим такому состоянию вектор $|y'\rangle$). Эта ситуация показана на рис. 18. Векторы $|x\rangle$ и $|y\rangle$ образуют базис в пространстве состояний падающих фотонов. Удобно записать эти векторы в виде столбцов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответственно³¹.

³¹ Обратите внимание на аналогию с описанием состояний необыкновенного и обыкновенного лучей из раздела 8!

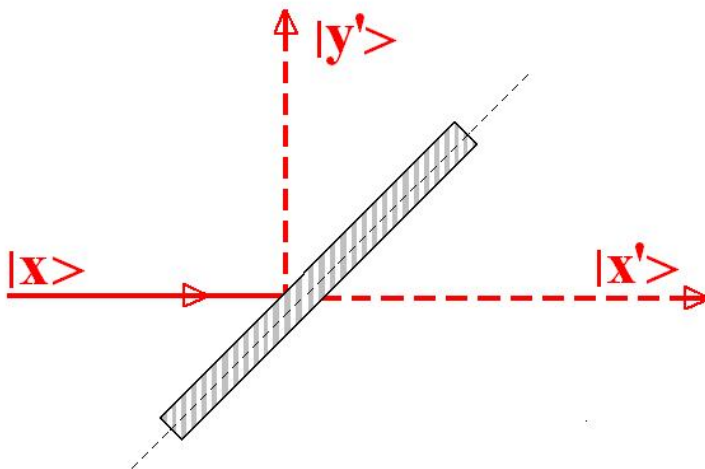


Рис. 18: Схематическое изображение работы полупрозрачного зеркала, когда на него падает фотон в состоянии $|x\rangle$

Задача. Докажите, что состояния $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$ образуют базис в пространстве состояний фотонов, которые провзаимодействовали с полупрозрачным зеркалом.

Указание. В дополнение к фотону, падающему на зеркало вдоль оси x , рассмотрите фотон, который падает на зеркало вдоль оси y . Воспользуйтесь рис. 19.

Векторам $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$ также удобно сопоставить столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть полупрозрачное зеркало устроено так, что вероятности прохождения фотона сквозь зеркало и отражения от зеркала равны между собой. Такое зеркало переводит вектор $|x\rangle$ в вектор $|\text{fin } 1\rangle$, который следующим образом может быть разложен по базису $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$:

$$|\text{fin } 1\rangle = \frac{|x'\rangle + e^{i\alpha}|y'\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (51)$$

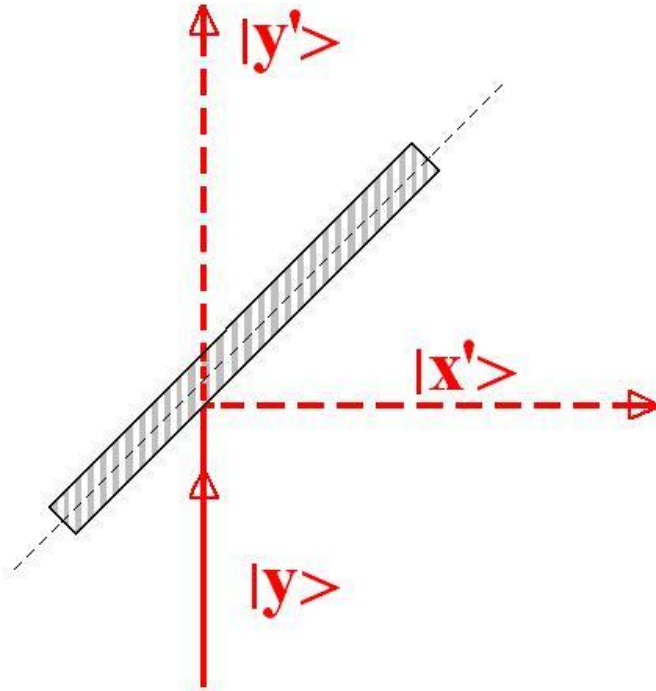


Рис. 19: Схематическое изображение работы полупрозрачного зеркала, когда на него падает фотон в состоянии $|y\rangle$

Множитель $1/\sqrt{2}$ возник из условия нормировки $\langle \text{fin } 1 | \text{fin } 1 \rangle = 1$ и условия равенства вероятностей прошедшего и отраженного состояний; α — неизвестная относительная действительная фаза. Ее еще требуется определить из дополнительных соображений.

Задача. Покажите, что в тех же самых предположениях относительно вероятностей прохождения и отражения вектор состояния $|y\rangle$ переводится зеркалом в вектор:

$$|\text{fin } 2\rangle = \frac{e^{i\beta} |x'\rangle + |y'\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (52)$$

Оператор полупрозрачного зеркала обозначим через $\hat{R}$. Согласно приведенным выше предположениям этот оператор действует следующим образом:

$$|\text{fin } 1\rangle = \hat{R} |x\rangle \quad \text{и} \quad |\text{fin } 2\rangle = \hat{R} |y\rangle. \quad (53)$$

В выбранном базисе оператор $\hat{R}$ является матрицей размерности 2×2 , которая может быть записана в виде

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\beta} \\ e^{i\alpha} & 1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Задача. При помощи формул (51), (52) и условия (53) докажите, что матричная форма оператора $\hat{R}$ в базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ задается выражением (54).

Из условия нормировки $\langle \text{fin } 1 | \text{fin } 1 \rangle = 1$ и $\langle \text{fin } 2 | \text{fin } 2 \rangle = 1$ и выражения (53) следует, что матрица $\hat{R}$ обязана быть унитарной (покажите это самостоятельно!).

Задача. Прямыми вычислениями проверьте, что унитарность матрицы $\hat{R}$ требует выполнения следующего условия на фазы α и β :

$$\alpha + \beta = \pi + 2\pi n, \quad (55)$$

где n — произвольное целое число от нуля до бесконечности.

Решения при разных значениях n должны быть физически эквивалентны. Поэтому мы можем ограничиться только случаем $n = 0$. Поскольку с физической точки зрения направления $|x\rangle$ и $|y\rangle$ ничем не отличаются одно от другого, то без потери общности можно выбрать $\alpha = \beta$. Тогда $\alpha = \beta = \pi/2$.³²

³²Заметим, что сделанный нами выбор фаз α и β не единственен. Можно отказаться от условия равенства фаз и взять, например, $\alpha = \pi$, а $\beta = 0$. Главное, чтобы сумма фаз удовлетворяла соотношению (55).

Следовательно, матрица полупрозрачного зеркала имеет вид

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

а векторы состояний $|\text{fin } 1\rangle$ и $|\text{fin } 2\rangle$ записываются как

$$\begin{aligned} |\text{fin } 1\rangle &= \frac{|x'\rangle + i|y'\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ |\text{fin } 2\rangle &= \frac{i|x'\rangle + |y'\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

9.3. Интерферометр Маха–Цандера

Схема интерферометра Маха–Цандера показана на рис. 20. Фотон в состоянии $|x\rangle$ падает на полупрозрачное зеркало A . Зеркало расщепляет фотон. Имеется два пути ABC и ADC , по которым фотон может попасть к точке C . В этой точке находится второе полупрозрачное зеркало, за которым стоят два счетчика фотонов ФЭУ $_x$ и ФЭУ $_y$. Для дальнейшего существенно, что зеркало C можно либо оставлять на месте, либо удалять уже *после* того, как фотон прошел точку A , но еще *до* того, как он долетел до точки C . Это будет важно в следующем параграфе, где мы используем уже знакомую читателям идею отложенного выбора Д. Уилера для проверки реальности принципа суперпозиции. Зеркала B и D полностью отражающие.

Прежде всего заметим, что путем подбора световодов с разными показателями преломления оптические длины ℓ_{ABC} и ℓ_{ADC} можно сделать различными.

Рассмотрим конфигурацию интерферометра Маха–Цандера, когда полупрозрачное зеркало C не убрано. Фотон, прошедший полупрозрачное зеркало A , находится в состоянии $|A_{in}\rangle = \hat{R}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle + i|y'\rangle)$, которое полностью аналогично состоянию $|\text{fin } 1\rangle$ предыдущего параграфа. Это состоя-

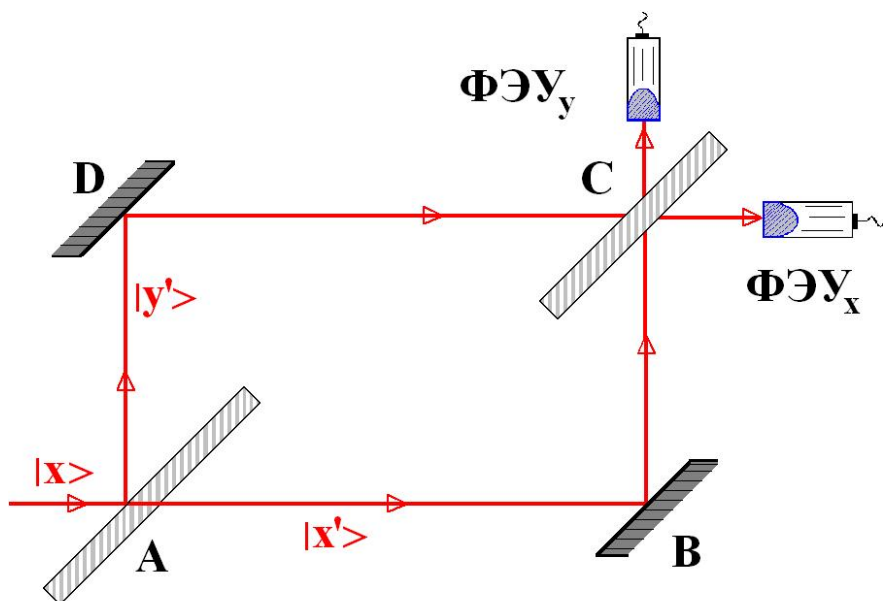


Рис. 20: Схема интерферометра Маха–Цандера

ние претерпевает эволюцию во времени, прежде чем фотон достигнет точки C . Квантовомеханическое уравнение для такой эволюции мы напишем только после изучения свойств нестационарного уравнения Шредингера. Однако, если предположить, что фотон распространяется по световоду как свободная частица, то временная эволюция состояний $|x'(t)\rangle$ и $|y'(t)\rangle$ должна описываться волной де Бройля вида $e^{-i\omega t}$. Пусть ℓ — оптическая длина пути, t — время, за которое фотон проходит расстояние ℓ . Обозначим через ω , λ и T — частоту, длину волны фотона и период колебаний соответственно. Тогда $\omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{\ell}{c} = 2\pi \frac{\ell}{\lambda}$. При помощи гипотезы де Бройля эволюция состояния $|x'\rangle$ за то время, когда фотон пролетит из точки A в точку C по пути ABC , может быть записана в виде $|x'(t)\rangle = |x'\rangle e^{2\pi i \frac{\ell_{ABC}}{\lambda}}$. Аналогично для состо-

яния $|y'(t)\rangle$. В базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствующая матрица эволюции состояния должна быть записана как

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{\ell_{ABC}}{\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \frac{\ell_{ADC}}{\lambda}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\Phi_{ABC}} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_{ADC}} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Наконец, зеркала B и D изменяют направление движения фотона на 90° . В матричном формализме это означает, что состояния, соответствующие верхним компонентам двухкомпонентных столбцов, должны переходить в нижние, и наоборот. Подобную перестановку можно совершить с помощью антидиагональной матрицы

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Таким образом, состояние фотона, прошедшего интерферометр Маха–Цандера с двумя полупрозрачными зеркалами A и C , можно записать в виде

$$|C_{in}\rangle = \hat{R} \hat{M} \hat{Z} |A_{in}\rangle = \hat{R} \hat{M} \hat{Z} \hat{R} |x\rangle. \quad (60)$$

Еще раз напомним читателям, что первым в формуле (60) действует самый правый оператор $\hat{R}$, который описывает прохождение фотоном полупрозрачного зеркала A . Затем фотон распространяется по оптическим путям и отражается от зеркал. Этот процесс описывается при помощи произведения операторов $\hat{M}$ и $\hat{Z}$. Наконец, самый левый оператор $\hat{R}$ в (60) описывает работу второго полупрозрачного зеркала C .

Заметим, что операторы $\hat{M}$ и $\hat{Z}$ коммутируют между собой (проверьте это!). Поэтому все равно, в каком порядке их применять. По той же причине мы не разбиваем, например, оптический путь ABC на два отрезка AB до зеркала B и BC после зеркала B и не ставим каждому из таких путей в соответствие свой оператор, а обходимся общим для всего пути оператором $\hat{Z}$.

Последнее очевидное предположение, при котором получена формула (60), заключается в том, что временем прохождения света через полупрозрачные зеркала A и C можно пренебречь.

Введем новое обозначение $\Phi = \Phi_{ABC} - \Phi_{ADC}$ для разности фаз, которая появляется при прохождении фотоном двух различных оптических путей в интерферометре.

Задача. Покажите, что в терминах разности фаз Φ формула (60) имеет вид

$$|C_{in}\rangle = i e^{i(\Phi_{ABC} + \Phi_{ADC})/2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Отсюда сразу следует, что вероятность зарегистрировать фотон при помощи ФЭУ $_x$ равна $\cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)$. А для ФЭУ $_y$ эта вероятность составляет $\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)$. Очевидно, что эти вероятности не могут зависеть от конкретного выбора фаз α и β в (55).

Задача. Получите тот же самый результат для вероятностей, не делая конкретного выбора величин фаз α и β , а считая только, что они связаны соотношением (55).

9.4. Экспериментальная проверка принципа суперпозиции

Теперь у нас есть все необходимые знания, чтобы описать одно из самых красивых подтверждений принципа суперпозиции. Этот эксперимент стал развитием опыта по доказательству корпускулярной природы фотонов [30], выполненного А. Аспе, П. Гренджером и Д. Роджером. В эксперименте использовался источник одиночных фотонов на основе возбужденных состояний атома кальция (рис. 21). Возбуждение создавалось при помощи двух лазеров с длинами волн $\lambda_K = 404$ нм и $\lambda_D = 581$ нм. Затем переход с возбужденного s -уровня на промежуточный p -уровень ($4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1$) сопровождался излучением фотона с длиной волны $\lambda_1 = 551,3$ нм. Этот фотон регистрировался счетчиком PM_1 (рис. 22), который давал сигнал всей установке быть готовой к

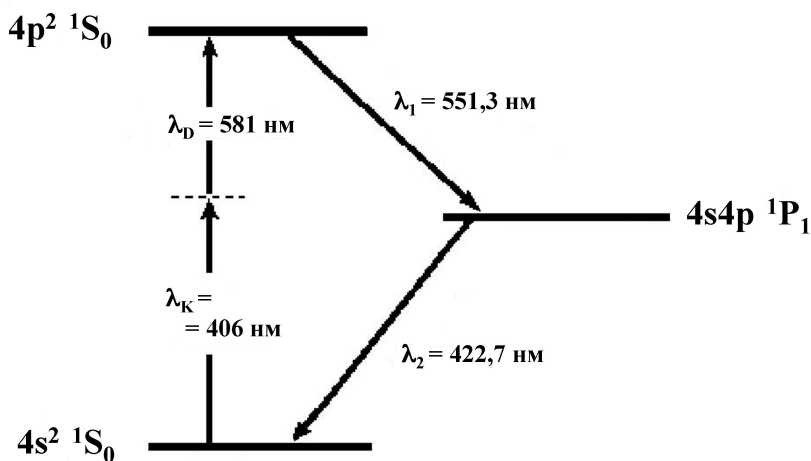


Рис. 21: Схема уровней энергии источника одиночных фотонов на основе атомов кальция

регистрации второго фотона с длиной волны $\lambda_2 = 422,7 \text{ нм}$, который должен появиться за счет перехода с промежуточного p -уровня в основное s -состояние ($4s4p \ ^1P_1 \rightarrow 4s^2 \ ^1S_0$). Сигнал готовности действовал в течение времени $\tau = 2\tau_s$, где $\tau_s = 4,7 \text{ нс}$ — время жизни промежуточного p -уровня. Такой выбор времени τ дает оптимальное соотношение сигнала к шуму в рассматриваемом эксперименте.

В эксперименте по доказательству корпускулярной природы фотонов одиночный фотон с длиной волны λ_2 (или, что тоже самое, частотой ν_2) падает на полупрозрачное зеркало BS , после чего может быть зарегистрирован либо счетчиком PM_r , либо счетчиком PM_t . Собственно, стремление частоты совпадения срабатывания счетчиков PM_r и PM_t к нулю при уменьшении потока фотонов является доказательством корпускулярной природы света.

Используя тот же самый кальциевый источник света и абсолютно аналогичную схему отбора одиночных фотонов, А. Аспе с коллегами стали подавать одиночные фотоны не на полупрозрачное зеркало BS , а на полупрозрачное

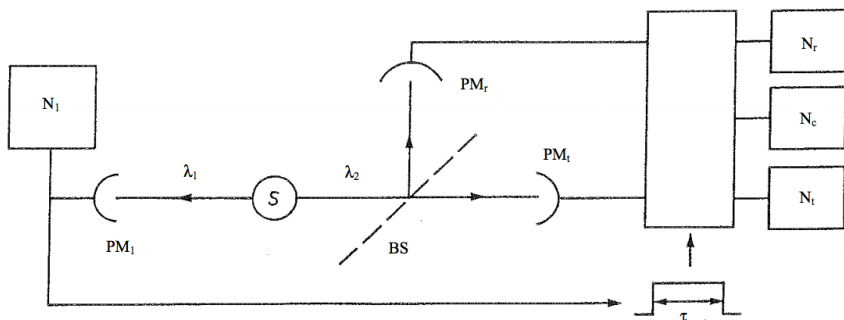


Рис. 22: Принципиальная схема установки А. Аспе по проверке корпускулярной природы света [30]. На рисунке S — источник одиночных фотонов. Остальные обозначения объяснены в тексте

зеркало A , которое является входом интерферометра Маха–Цандера (рис. 20). Это позволило провести экспериментальную проверку принципа суперпозиции.

Имеется две логические возможности. Первая из них отрицает принцип суперпозиции для одиночных фотонов. Тогда после прохождения полупрозрачного зеркала A фотон с вероятностью $1/2$ пойдет по пути ABC (то есть будет находиться в состоянии $|x'\rangle$) или с такой же вероятностью пойдет по пути ADC (то есть окажется в состоянии $|y'\rangle$). Хотя мы не знаем, какой путь выбрал каждый из одиночных фотонов, но в упорстве отрицания принципа суперпозиции можем утверждать, что после прохождения полупрозрачного зеркала C такой фотон с вероятностью $1/2$ попадет в ФЭУ $_x$ и с такой же вероятностью $1/2$ попадет в ФЭУ $_y$. При этом указанные вероятности *не зависят от разности фаз Φ оптических путей ABC и ADC* используемого интерферометра, поскольку каждый фотон идет только по одному из путей.

Вторая возможность признает принцип суперпозиции даже для одиночных фотонов. Тогда после прохождения полупрозрачного зеркала A *каждый фотон* находится в состоянии $|A_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x'\rangle + i |y'\rangle)$, которое является

суперпозицией состояний $|x'\rangle$ и $|y'\rangle$. То есть одиночный фотон *одновременно* распространяется по путям ABC и ADC в интерферометре Маха–Цандера. Таким образом, на полупрозрачном зеркале C одиночный фотон может *интерферировать сам с собой*, и его состояние $|C_{in}\rangle$ на выходе из интерферометра описывается формулой (60). Следовательно, согласно результату (61) необходимо заключить, что вероятности срабатывания $\Phi\mathcal{E}U_x$ и $\Phi\mathcal{E}U_y$ *зависят от разности фаз Φ* .

Аспе с коллегами проверили обе возможности. Для этого они выполнили две серии измерений. В каждой серии 200 раз при помощи механического изменения положения зеркал B и D разность оптических путей ABC и ADC увеличивалась с шагом $\lambda/50$. Таким образом, разность фаз Φ пробегала значение от 0 до 8π . Серии измерений отличались длительностью набора статистики. В первой серии на каждом шаге статистика набиралась 1 секунду, во второй — 15 секунд.

Если принцип суперпозиции для одиночных фотонов не выполняется, то на графике зависимости числа фотонов в каждом из $\Phi\mathcal{E}U$ от числа шагов изменения оптического пути должна получиться горизонтальная прямая. В противном случае должно наблюдаться четыре максимума и четыре минимума. Оригинальный рис. 23 из статьи [30] *однозначно свидетельствует в пользу выполнения принципа суперпозиции для одиночных фотонов*. На рисунке $\Phi\mathcal{E}U_x$ соответствует обозначение $MZ1$, а $\Phi\mathcal{E}U_y$ — обозначение $MZ2$. Видно, что имеется небольшая начальная разность фаз, которая обусловлена прохождением фотонов через полупрозрачные зеркала A и C . Как и следовало ожидать, число отсчетов в каждой из серий пропорционально времени набора статистики, то есть отличается примерно в 15 раз. Это доказывает равномерность испускания одиночных фотонов.

Развитием работы [30] служит работа [31], в которой реализована идея Д. Уилера об отложенном выборе. Эта идея уже возникала в параграфе 2.2, когда при помощи «мысленного эксперимента» мы подвергли критике корпускулярный взгляд на прохождение фотонов через поляризатор. Применительно

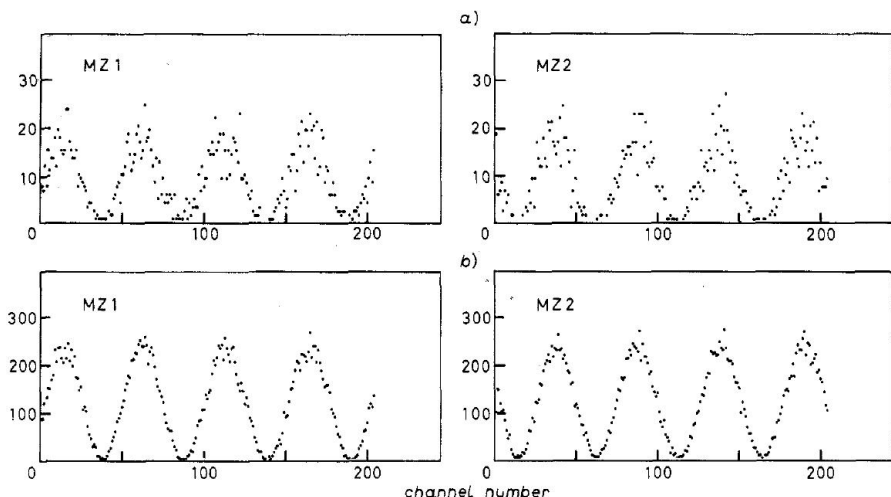


Рис. 23: Зависимость числа отсчетов ФЭУ_x (обозначено как $MZ1$) и ФЭУ_y (обозначено как $MZ2$) от порядкового номера шага изменения разности фаз оптических путей ABC и ADC интерферометра Маха–Цандера рис. 20. Каждый шаг соответствует увеличению разности оптических путей на величину $\lambda/50$. Представлены две серии измерений: **a)** с длительностью набора статистики на каждом шаге 1 сек.; **b)** с длительностью набора статистики на каждом шаге 15 сек.

к прохождению одиночных фотонов через интерферометр Маха-Цандера идея отложенного выбора выглядит следующим образом. Пусть одиночный фотон проходит первое полупрозрачное зеркало A . После этого при помощи некоторого случайного процесса экспериментатор решает, оставлять или убирать полупрозрачное зеркало C . Такой выбор делается для нескольких последовательных значений разности фаз Φ . Очевидно, что в отсутствие полупрозрачного зеркала C воспроизводится экспериментальная ситуация, которая показана на рис. 22. В этом случае срабатывание ФЭУ_x однозначно говорит, что фотон двигался по пути ADC , а срабатывание ФЭУ_y указывает, что фотон

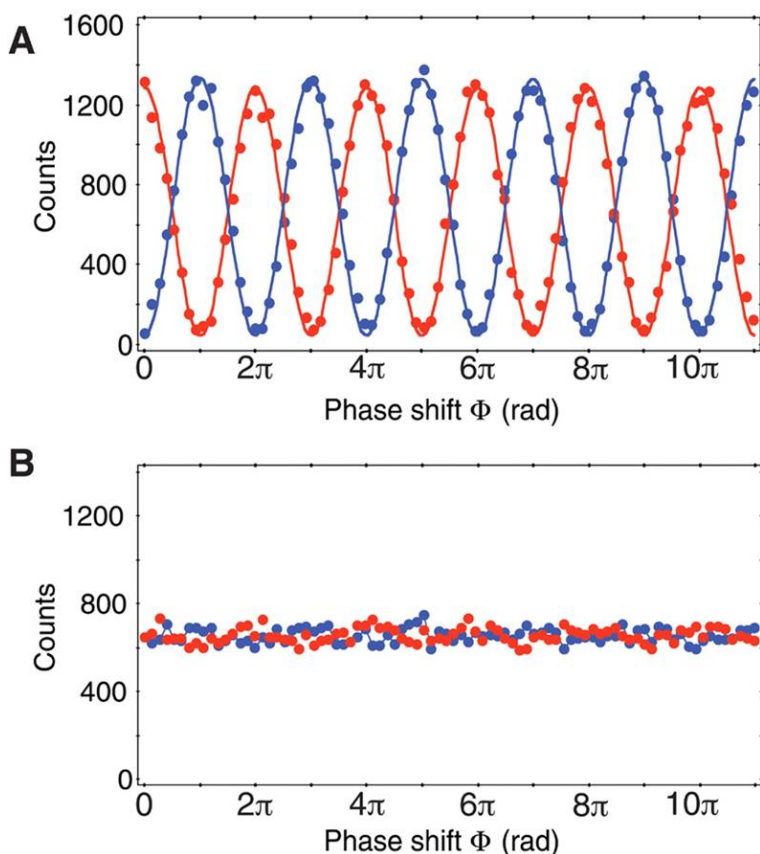


Рис. 24: Зависимость числа отсчетов ФЭУ_x (красная линия (красные точки) или более светлая линия (светлые точки) в черно-белом варианте) и ФЭУ_y (синяя линия (синие точки) или более темная линия (темные точки) в черно-белом варианте) от порядкового номера шага изменения разности фаз оптических путей ABC и ADC интерферометра Маха–Цандера рис. 20. Рис. **A** соответствует случаю, когда полупрозрачное зеркало C оставлено на своем месте. Рис. **B** соответствует случаю, когда полупрозрачное зеркало C убрано. Статистика для каждой точки собиралась примерно 1,9 сек. За это время для обоих положений зеркала C детектируется порядка 2600 фотонов. И они примерно пополам делятся между обеими возможностями **A** и **B**

двигался по пути ABC . Поскольку фотон находится в состоянии $|A_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x'\rangle + i|y'\rangle)$, то частоты срабатывания обоих ФЭУ не зависят от разности фаз Φ и равны друг другу. Если же полупрозрачное зеркало C не убирается, то в точности воспроизводится эксперимент, который был описан выше в настоящем параграфе, и зависимость частоты срабатывания от разности фаз Φ будет иметь место. Изюминка эксперимента в том, что он показывает, что состояние одиночного фотона описывается при помощи принципа суперпозиции не только на выходе, но и на входе интерферометра. То есть, фотон действительно «размазан» по двум возможным путям. На рис. 24 показана зависимость числа отсчетов от разности фаз, когда полупрозрачное зеркало оставлено на месте (**A**) и когда оно убрано (**B**). В первом случае наблюдается интерференция согласно формуле (61). Во втором случае — две практически совпадающие прямые, параллельные оси абсцисс. Еще одно красивое доказательство справедливости принципа суперпозиции для одиночных фотонов.

Согласно проекционному постулату М. Борна, в квантовой теории времени излучения и поглощения фотона считаются много меньше, чем время, необходимое для пролета фотона из точки излучения к точке поглощения. Поэтому на первый (и очень наивный!) взгляд размер экспериментальной установки для проверки принципа суперпозиции с помощью одиночных фотонов не должен влиять на результаты опытов. Однако если одиночный фотон излучается с промежуточного уровня, который имеет конечное время жизни τ_s , то для гарантированного исключения влияния различных пространственно-временных корреляций необходимо сделать так, чтобы с момента излучения фотона до момента его поглощения прошел интервал времени, значительно превосходящий (например, в 10 раз) время жизни промежуточного состояния. Для экспериментов А. Аспе это требование означает, что длина интерферометра Маха–Цандера должна быть порядка $10 c \tau_s \approx 15$ м, где c — скорость света в вакууме. Фактическая длина установки А. Аспе ограничивалась размерами экспериментальной лаборатории и не превышал десяти метров [27]. Поэтому опыты Аспе до конца не закрыли вопрос о том, в какой степени результат интерферен-

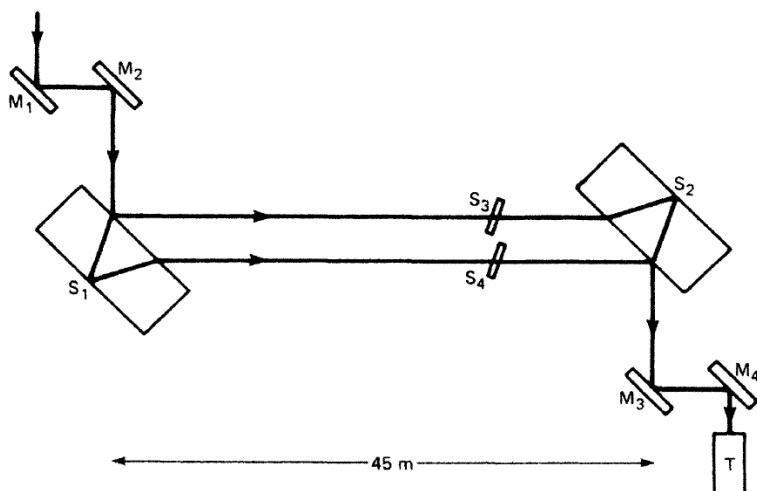


Рис. 25: Схематическое изображение схемы эксперимента с интерферометром Жамена из работы [32]

ции одиночного фотона определяется принципом суперпозиции, а в какой — гипотетическими корреляциями, совместимыми с требованиями специальной теории относительности³³.

Окончательную точку в данном вопросе поставил эксперимент Д. Франсона и К. Потоцкого [32]. В эксперименте был использован двухлучевой интерферометр Ж. Жамена (рис. 25), основными элементами которого являются две плоскопараллельные пластины кремния S_1 и S_2 толщиной 63,5 мм каждая. Расстояние между пластинами составляет $L_{S_1 S_2} = 45$ м, что позволяет исключить влияние любых разумных пространственно-временных корреляций на результаты измерений. При помощи системы зеркал M_1 и M_2 на кремниевую пластину S_1 падают одиночные фотоны длиной волны $\lambda = 585,2$ нм, испускаемые возбужденными уровнями атомов неона. За счет отражения от верхней и нижней граней пластины S_1 фотон может идти к пластине S_2 сразу по двум

³³Нелокальные корреляции и взаимодействия, превосходящие скорость света, в данном учебном пособии обсуждаться не будут, поскольку для их введения в теорию нет сколько-нибудь серьезных оснований.

путям (плечам интерферометра) $S_1S_3S_2$ и $S_1S_4S_2$. Кремниевые пластинки S_3 и S_4 служат для создания контролируемой разности фаз между плечами интерферометра. В пластине S_2 согласно принципу суперпозиции одиночный фотон интерферирует сам с собой и при помощи системы зеркал M_3 — M_4 попадает на фотоэлектронный умножитель T , который чувствителен к регистрации одиночных фотонов.

Очевидно, что скорость счета фотонов R пропорциональна интенсивности и зависит от разности фаз Φ в плечах $S_1S_3S_2$ и $S_1S_4S_2$ интерферометра Жамена следующим образом:

$$R = a + b \cos^2 \left(\frac{\Phi}{2} \right), \quad (62)$$

где a и b — некоторые константы.

Задача. Создать теорию интерферометра Жамена по аналогии с теорией интерферометра Маха–Цандера из параграфа 9.3.

Задача. При помощи этой теории получить формулу (62).

Экспериментальная зависимость скорости счета R при средней скорости счета $2,4 \text{ с}^{-1}$ показана на рис. 26. Если бы одиночные фотоны не интерферировали сами с собой, а шли бы по одному из путей $S_1S_3S_2$ или $S_1S_4S_2$, то экспериментальные точки лежали бы на прямой $R = 2,4 \text{ с}^{-1}$, параллельной оси абсцисс. Однако экспериментальная зависимость не имеет ничего общего с константой и находится в прекрасном согласии с предсказаниями формулы (62).

Можно было бы попытаться объяснить картину рис. 26 тем, что в интерферометр Жамена иногда попадает не один, а сразу два фотона, которые интерферируют друг с другом после прохождения пластины S_2 . Вероятность попадания второго фотона в интерферометр при условии, что в приборе уже находится один фотон, можно оценить следующим образом:

$$w_{2\gamma} \sim \frac{L_{S_1S_2}}{c} R \approx 4 \times 10^{-7}.$$

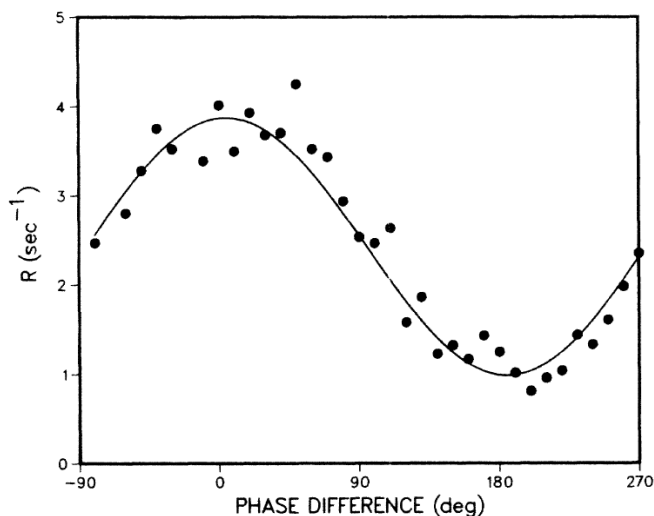


Рис. 26: Экспериментальная зависимость скорости счета R одиночных фотонов в интерферометре Жамена от разности фаз Φ — точки. Один бин на рисунке соответствует 10° . Легко видеть, что зависимость R от Φ хорошо описывается формулой (62) — сплошная линия. Рисунок взят из работы [32]

Следовательно, если отличие экспериментальной зависимости скорости счета R на рис. 26 от константы было бы обусловлено только двухфотонной интерференцией, то мы должны были получить практически постоянную подложку, на фоне которой почти невозможно увидеть эффект изменения скорости счета. Однако на рис. 26 амплитуда изменения величины R сравнима или даже превосходит высоту постоянной подложки. Это доказывает, что основной эффект связан с интерференцией одиночных фотонов.

Таким образом, в работе [32] было получено еще одно экспериментальное подтверждение справедливости принципа суперпозиции для одиночных микробъектов, в данном случае — фотонов.

В заключение этого параграфа еще раз подчеркнем, что главная трудность в восприятии «неклассической физики» как раз и состоит в том, чтобы изба-

виться от «очевидных» и «интуитивно понятных» суждений в областях, где человеческие здравый смысл и жизненный опыт перестают работать. В микромире надо доверять экспериментам, а не классическому здравому смыслу и макроскопическому жизненному опыту. Ведь Вселенная гораздо более разнообразна и многогранна, чем ежедневно окружающая нас нерелятивистская макроскопическая действительность, где приобретались те самые «здравый смысл» и «жизненный опыт»!³⁴ Читателю, склонному к философствованию, на примере осмысления квантовой теории можно предложить поразмышлять о том, в какой мере классическое восприятие человека может поставить принципиальные ограничения на его способность постигнуть Вселенную. Не может ли так случиться, что на какой-то ступени познания Мира у наблюдателя просто закончатся все возможные комбинации классических терминов, так что он не сможет сделать обобщение для перехода на другой, более фундаментальный уровень описания природы?

³⁴В очередной раз сошлемся на авторитет Л.Д. Ландау. Лев Давидович говорил: «Мы способны вычислить даже то, что не в состоянии себе представить».

9.5. Задача о «квантовой бомбе»

Не только прямое измерение характеристик микросистемы при помощи макроприбора, но и существование такого макроприбора, который *никак не реагирует* на состояние квантовой системы, может нести некоторую информацию о микросистеме. Это было продемонстрировано в 1993 году двумя израильскими физиками Авшаломом Элитцуром (Avshalom Elitzur) и Львом Вайдманом (Lev Vaidman) [33].

Рассматривается следующая задача. На военном складе имеется миллион одинаковых бомб. Взрыватели некоторых из них — исправные, а некоторых — неисправные. Известно, что исправный взрыватель срабатывает при поглощении даже одного фотона со 100%-й вероятностью. Неисправный взрыватель с фотоном вообще не взаимодействует, и следовательно, никогда не срабатывает. Требуется изъять со склада **абсолютно все** неисправные бомбы, при этом, сохранив **хоть какое-то** количество исправных бомб не взорвавшимися. Кроме реакции на взаимодействие с фотоном, исправный и неисправный взрыватели больше ничем друг от друга не отличаются.

Очевидно, что если бы фотон был классическим объектом, то задача не имела бы решения. Но квантовая природа фотонов позволяет решить эту задачу.

Поместим бомбу в интерферометр Маха–Цандера так, чтобы ее взрыватель находился в плече AB (рис. 27). Плечи ABC и ADC выберем равной длины. Тогда $\Phi_{ABC} = \Phi_{ABD} = \Phi_0$. На вход интерферометра подадим фотон в состоянии $|x\rangle$.

Если бомба *неисправна*, то интерферометр с бомбой абсолютно не отличается от интерферометра без бомбы. Согласно теории интерферометра Маха–Цандера, которая была развита в параграфе 9.3, после прохождения полупрозрачного зеркала C фотон будет находиться в состоянии

$$|C_{in}\rangle = \hat{R}\hat{M}\hat{Z}\hat{R}|x\rangle =$$

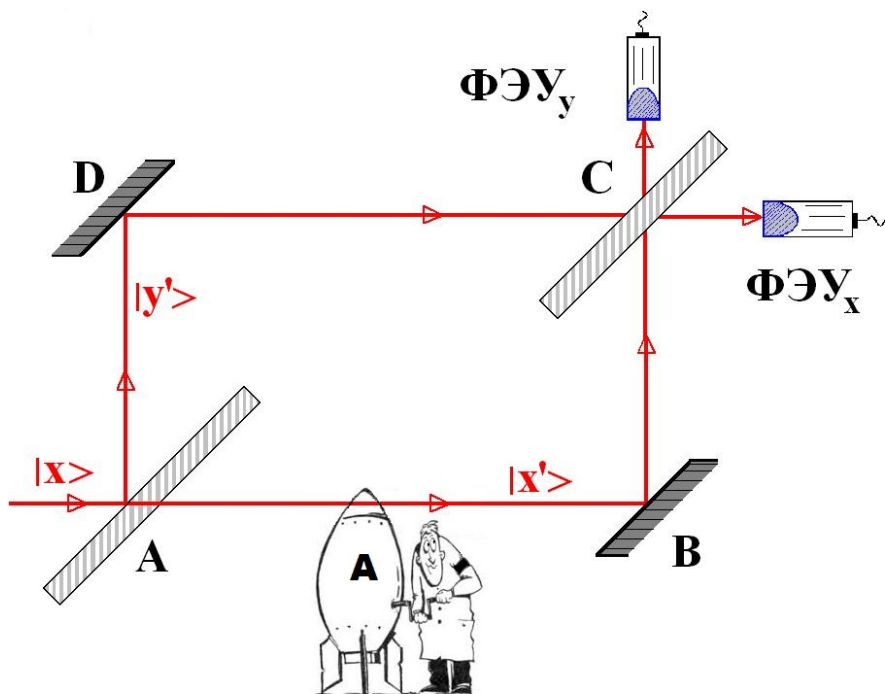


Рис. 27: Схема интерферометра Маха–Цандера с бомбой

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi_0} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= i e^{i\Phi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, если бомба неисправна, то на выходе интерферометра срабатывает только $\Phi \mathcal{E} \mathcal{Y}_x$, а сама бомба, естественно, не взорвется.

Пусть теперь бомба исправна. После прохождения полупрозрачного зеркала A фотон окажется в состоянии

$$|A_{in}\rangle = \hat{R}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

То есть с вероятностью $w_{ADC} = 1/2$ фотон пойдет по пути ADC , а с вероятностью $w_{ABC} = 1/2$ — по пути ABC . Если фотон пойдет по пути ABC , то он должен попасть на исправный взрыватель, что приведет к взрыву бомбы. Поэтому если бомба исправна, но не взорвалась, то фотон пошел по пути ADC . В этом случае его состояние будет

$$|A_{in}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|y'\rangle.$$

На выходе из интерферометра ему соответствует состояние

$$\begin{aligned} |\tilde{C}_{in}\rangle &= i\hat{R}\hat{M}\hat{Z}|y'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi_0} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \\ &= \frac{ie^{i\Phi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из анализа состояния $|\tilde{C}_{in}\rangle$ очевидно, что если бомба исправна, но фотон прошел по пути ADC , то с вероятностью $w_x = 1/2$ сработает ФЭУ $_x$, а с вероятностью $w_y = 1/2$ сработает ФЭУ $_y$. Исправная бомба при этом *НЕ взорвется!* Если сработал ФЭУ $_x$, то ситуация ничем не отличается от ситуации с неисправной бомбой. Поэтому такие бомбы должны быть помечены как неисправные. Если же бомба не взорвалась, но сработал ФЭУ $_y$, то взрыватель бомбы исправен.

Таким образом, при помощи интерферометра Маха–Цандера точно удастся идентифицировать четверть ($w_{ADC} * w_y = 1/4$) исправных бомб, не уничтожив

их. Еще четверть ($w_{ADC} * w_x = 1/4$) исправных бомб не удастся идентифицировать как исправные. А половина исправных бомб ($w_{ABC} = 1/2$) при таком тесте будет уничтожена.

Экспериментально (без бомб, естественно!) данный эффект был проверен и подтвержден через год в работе [34].

После проведения тестирования взрывателей бомб при помощи интерферометра Маха–Цандера, все бомбы можно разделить на три категории. В первую вошли исправные взорвавшиеся бомбы. Во вторую — исправные, но не взорвавшиеся бомбы. И наконец, в третью — неисправные бомбы и некоторое количество невзорвавшихся исправных бомб, которые не были идентифицированы как исправные. Эта последняя категория — самая интересная. Ведь к ней еще раз можно применить описанную выше процедуру выявления исправных бомб. В результате все бомбы опять поделятся на три категории. Теперь можно провести процедуру идентификации исправных бомб еще раз. И так далее.

Задача. Какое максимальное количество невзорвавшихся исправных бомб можно выявить в результате многократного повторения процедуры тестирования взрывателей при помощи интерферометра Маха–Цандера?

9.6. Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния

Пусть некоторая секретная информация передается от Отважного Разведчика из вражеской страны в наш Самый Главный Штаб при помощи вектора состояния $|\psi\rangle$ ³⁵. Теорема утверждает, что Тайный Враг из любой другой страны, случайно перехвативший *неизвестный ему* вектор состояния $|\psi\rangle$, никогда не сможет создать себе его точную копию так, чтобы о несанкционированном перехвате не узнали в нашем Самом Главном Штабе.

Действительно, чтобы Самый Главный Штаб не догадался о перехвате сообщения, Тайный Враг должен уметь из одного вектора состояния $|\psi\rangle$ делать как минимум два абсолютно идентичных вектора, чтобы одну копию оставить себе для последующей дешифровки, а другую отослать в Самый Главный Штаб, чтобы там не догадались о факте перехвата. Такой процесс называется **клонированием** вектора состояния.

Предположим, что вектор состояния $|\psi\rangle$ можно представить как суперпозицию двух векторов состояния $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$, то есть

$$|\psi\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle.$$

При этом $C_1 \neq 1$ и $C_2 \neq 1$. Далее предположим, что процедура клонирования существует. Пусть эта процедура из произвольного вектора состояния $|\phi\rangle$ и другого «пустого» вектора состояния $|0\rangle$ делает две копии вектора $|\phi\rangle$, то есть

$$|\phi\rangle |0\rangle \rightarrow |\phi\rangle |\phi\rangle.$$

С одной стороны, мы можем применить процедуру клонирования непосредственно к вектору $|\psi\rangle$. Это дает

$$|\psi\rangle |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle |\psi\rangle =$$

³⁵Конкретную технику создания вектора $|\psi\rangle$, несущего заданную информацию, методы ее передачи, приема и расшифровки мы обсуждать не будем.

$$\begin{aligned}
&= \left(C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle \right) \times \left(C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle \right) = \\
&= C_1^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle + \\
&+ C_1 C_2 \left(|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle \right).
\end{aligned} \tag{63}$$

С другой стороны, гипотетическую операцию клонирования можно применить к каждому из векторов линейной комбинации. В этом случае

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle |0\rangle &= C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle \rightarrow \\
&\rightarrow C_1 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{64}$$

Если операция клонирования является самосогласованной, то результат (63) должен совпадать с результатом (64). Очевидно, что из-за наличия дополнительного интерференционного слагаемого в (63) совпадение обоих способов клонирования состояния $|\psi\rangle$ возможно только при условии $C_1 = C_2 = 0$. Во всех остальных случаях операция клонирования не согласуется с принципом суперпозиции, то есть с Постулатом №3. Это доказывает теорему о невозможности клонирования чистого состояния.

Хотя рассуждения, которые приводят к доказательству теоремы, достаточно просты и очевидны, сама теорема была доказана только в 1982 году. То есть более чем через пятьдесят лет после создания квантовой механики! А результат произвел на современников столь большое впечатление, что был опубликован в журнале «Nature» [35]. В англоязычной литературе теорема о невозможности клонирования чистого состояния получила название «No-cloning theorem». Она стала родоначальницей целого ряда теорем о запрете определенных действий в рамках квантовой теории (так называемые «No-go theorems»). Еще одна теорема из этого списка будет доказана в разделе 9.7.

Задача. Обобщите теорему о невозможности клонирования на произвольное число копий вектора $|\psi\rangle$, если этот вектор в свою очередь представляет собой суперпозицию произвольного числа векторов состояния.

При доказательстве теоремы можно дополнительно учесть вектор состояния макроприбора, при помощи которого происходит измерение свойств микросистемы. Пусть до измерения состояние макроприбора описывалось вектором $|A_0\rangle$. После измерения состоянию макроприбора будет соответствовать вектор $|A_\phi\rangle$, который зависит от конечного состояния микросистемы $|\phi\rangle$.

Задача. Доказать, что невозможен процесс

$$|A_0\rangle |\phi\rangle |0\rangle \rightarrow |A_\phi\rangle |\phi\rangle |\phi\rangle.$$

Подсказка Разложите вектор $|\psi\rangle$ в суперпозицию двух состояний $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$. Затем покажите, что $|A_\psi\rangle \sim |A_{\varphi_1}\rangle \sim |A_{\varphi_2}\rangle$. Тогда доказательство сведется к предыдущему.

В формулировке теоремы о невозможности клонирования ключевую роль играет тот факт, что вектор состояния $|\psi\rangle$ *неизвестен* (или *произволен*, что, по-сути, одно и то же). Известный вектор клонировать можно³⁶. Например, пусть $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — известный вектор. В качестве стандартного «пустого» вектора $|0\rangle$ выберем вектор³⁷ $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, который известен *a priori*.

Тогда $|\psi\rangle |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и унитарное преобразование $\hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

переводит состояние $|\psi\rangle |0\rangle$ в клонированное состояние $|\psi\rangle |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

³⁶Можно, но абсолютно бессмысленно. Действительно, зачем Тайному Врагу копировать сообщение, содержание которого он и так знает?

³⁷Обратите внимание на терминологию! «Пустой вектор» не означает «нулевой вектор»! Это просто приготовленный нами известный вектор.

Задача. Проверьте последнее утверждение самостоятельно.

Если известен вектор состояния $|\psi\rangle$, то можно найти ортогональные ему векторы. То есть эти векторы тоже известны, и следовательно, их можно клонировать наряду с вектором $|\psi\rangle$. Более того, клонирование может осуществляться одним и тем же унитарным оператором. Действительно, пусть $\hat{U}$ — искомый унитарный оператор. Рассмотрим два состояния $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$, для которых осуществляется операция клонирования. Тогда:

$$\begin{aligned}\hat{U}|\psi\rangle|0\rangle &= |\psi\rangle|\psi\rangle; \\ \hat{U}|\varphi\rangle|0\rangle &= |\varphi\rangle|\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Теперь скалярно умножим одно равенство на другое. В результате получим:

$$|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = \langle 0|\langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\varphi\rangle|0\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle\langle 0|0\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle.$$

То есть необходимо решить уравнение $|x|^2 = x$, где $x = \langle\psi|\varphi\rangle$. Имеется два решения. Первое: $x = 1$, что ведет за собой равенство $|\varphi\rangle \equiv |\psi\rangle$. Второе: $x = 0$, которое означает, что $|\varphi\rangle = |\psi^{(\perp)}\rangle$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Задача. Проверьте, что вектор $|\psi^{(\perp)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ортогональный вектору $|\psi\rangle$ из рассмотренного выше числового примера, может быть клонирован при помощи того же унитарного преобразования $\hat{U}$.

На первый взгляд может показаться, что теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния также запрещает копирование любой информации на макроскопическом уровне, что явно противоречит нашему повседневному жизненному опыту. Однако даже самые маленькие макроскопические объекты, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни, содержат не менее 10^{20} микрочастиц. Эти микрочастицы непрерывно взаимодействуют между собой и с окружающим миром. Поэтому если два макрообъекта кажутся нам одинаковыми, то на самом деле это не так. Векторы состояния по-

что всех частиц, образующих один макрообъект, хоть немного, но отличаются от векторов состояния микрочастиц, которые составляют другой макрообъект. Поэтому векторы состояний даже абсолютно похожих с виду макрообъектов (например, двух одинаковых жестких дисков) с точки зрения квантовой теории совершенно различны. Более того, эти векторы состояний практически ортогональны друг другу³⁸. Следовательно, перенос информации с одного жесткого диска на другой с точки зрения квантовой физики не является процессом клонирования и не попадает под юрисдикцию теоремы о запрете клонирования³⁹.

Теорема о невозможности клонирования позволяет под новым углом зрения взглянуть на концепцию ансамблей в квантовой механике. Напомним, что согласно проекционному постулату М.Борна в каждом отдельном измерении происходит случайная редукция вектора состояния $|\psi\rangle$ к одному из макроскопически различимых состояний $|a_j\rangle$. Стандартный вывод из проекционного постулата гласит, что если у нас имеется только одна микросистема, приготовленная в неизвестном состоянии, то после измерения этой системы мы абсолютно ничего не можем сказать о ее начальном состоянии. Необходимо много одинаково приготовленных квантовых систем (ансамбль), над каждой из которых проводится измерение. И только на основе серии измерений можно высказать суждение о структуре неизвестного начального состояния.

Но, может быть, все-таки существует какая-нибудь «магическая» последовательность измерений, которой можно подвергнуть уникальное неизвестное состояние $|\psi\rangle$, чтобы сделать утверждение об этом состоянии? Просто мы еще не смогли такую последовательность открыть. Нетрудно заметить, что подобная «магическая» последовательность, если бы она действительно существовала, эквивалентна процедуре клонирования неизвестного чистого состояния.

³⁸Чтобы почувствовать это, предположим, что скалярное произведение векторов состояния i -й частицы первого макрообъекта и соответствующей ей i -й частицы второго макрообъекта не превосходит 0.999999999. Тогда скалярное произведение векторов состояния двух макрообъектов не превосходит величины $(0.999999999)^{10^{20}} \approx 10^{-4342944819}$. То есть даже при ничтожном отличии векторов состояния микрочастиц, вектора состояния макрообъектов оказываются практически ортогональными друг другу!

³⁹Но может попасть под действие законов о защите интеллектуальной собственности.

А это, как мы доказали выше, невозможно. Таким образом, только при помощи квантовых ансамблей и проведения однократных измерений над каждым из членов ансамбля можно изучать неизвестные квантовые состояния. Похоже, что другого пути нет.

Задача. Сформулируйте аргументы «за» и аргументы «против» существования вектора состояния Вселенной как целого.

Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния является хорошим примером, как первые принципы квантовой теории можно применить к решению вполне жизненных задач. На основе доказанной выше теоремы (пусть читателей не обманывает ее шуточная формулировка!) в настоящее время бурно развивается прикладная наука — **квантовая криптография**, основной задачей которой является создание каналов передачи информации, защищенных от подслушивания. Такие каналы могут найти широкое применение не только в военной, но и в коммерческой сфере. В последнее время также ведутся активные экспериментальные исследования по созданию методов квантовой защиты денежных банкнот от подделки на основе теоремы о невозможности клонирования. Предполагается, что в банкноты будут включать элементы чистых квантовых состояний, которые созданы по определенному алгоритму. Поэтому денежные знаки принципиально невозможно будет подделать даже самым искусным мошенникам.

В конце параграфа без приведения доказательства дадим ответ на вопрос, который, хотя и далеко выходит за рамки данного учебного пособия, но является одним из ключевых для практического использования теоремы о невозможности клонирования. Именно: можно ли клонировать произвольное смешанное состояние? Поскольку любое смешанное состояние является набором чистых состояний, то из соображений банальной эрудиции можно заключить, что произвольное смешанное состояние клонировать невозможно. Это правильный ответ. Однако строгое доказательство данного утверждения сложно и существенно опирается на результаты квантовой теории информации (так называемая «No-broadcast theorem») [36]. Хотя нельзя клонировать неизвестное

квантовое состояние, но приближенное копирование смешанного квантового состояния осуществимо. Это впервые было показано в работе [37].

9.7. Теорема о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния

В разделе 9.6 была доказана теорема о невозможности клонирования (произвольного) чистого состояния. Для этой теоремы существует, в некотором смысле, обратная теорема о невозможности уничтожения одной из копий (произвольного) чистого состояния («No-deleting theorem»). Теорема была сформулирована в 2000 году и ее доказательство опубликовано в журнале «Nature» [38]. Условие теоремы гласит, что если имеются две копии неизвестного чистого состояния, то невозможно безвозвратно удалить одну из копий, чтобы другая осталась нетронутой, то есть невозможен процесс

$$|\phi\rangle |\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle |0\rangle.$$

Для доказательства рассмотрим некоторое чистое состояние

$$|\psi\rangle = C_1 |\varphi_1\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle,$$

которое разложено по базису $|\varphi_i\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. Коэффициенты C_1 и C_2 подчиняются стандартному условию нормировки

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

Для придания смысла принципу суперпозиции дополнительно потребуем, чтобы $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$. В остальном коэффициенты C_1 и C_2 являются абсолютно произвольными.

Предположим, что существует процедура уничтожения одной из копий произвольного чистого состояния. Тогда применим эту процедуру к вектору $|\psi\rangle$. Получим

$$|\psi\rangle |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle |0\rangle \rightarrow C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle. \quad (65)$$

Теперь будем рассматривать $|\psi\rangle$ как линейную комбинацию $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$ и применим процедуру уничтожения к произведению линейных комбинаций. Тогда получим

$$\begin{aligned} |\psi\rangle |\psi\rangle &= C_1^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle + \\ &+ C_1 C_2 (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle) \rightarrow \\ &\rightarrow C_1^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle + \sqrt{2} C_1 C_2 |\Phi\rangle, \end{aligned} \quad (66)$$

где $|\Phi\rangle$ — некоторое вспомогательное состояние, которое не должно зависеть от коэффициентов C_1 и C_2 .

Найдем, при каких условиях выражения (65) и (66) совпадают. Решаем уравнение:

$$\begin{aligned} \text{const} \times (C_1 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2 |\varphi_2\rangle |0\rangle) &= \\ &= C_1^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + C_2^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle + \sqrt{2} C_1 C_2 |\Phi\rangle. \end{aligned}$$

Оно превращается в тождество, если $\text{const} = C_1 + C_2$ и

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) |0\rangle.$$

Задача. Докажите истинность данного утверждения.

Заметим, что если $\text{const} = 0$ (то есть, $C_1 = -C_2$), то результаты (65) и (66) невозможно согласовать друг с другом и процедура уничтожения становится противоречивой. Таким образом, например, копию состояния

$$|\chi^{(1)}\rangle = \left| \psi \left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle)$$

уничтожить нельзя.

Теперь рассмотрим уничтожение одной из копий чистого состояния

$$|\psi^{(\perp)}\rangle = C_2^* |\varphi_1\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle.$$

Задача. Проверить, что $\langle \psi^{(\perp)} | \psi \rangle = 0$.

Применим искомую процедуру к самому вектору

$$|\psi^{(\perp)}\rangle |\psi^{(\perp)}\rangle \rightarrow |\psi^{(\perp)}\rangle |0\rangle \rightarrow C_2^* |\varphi_1\rangle |0\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle |0\rangle \quad (67)$$

и к его разложению в суперпозицию

$$\begin{aligned} |\psi^{(\perp)}\rangle |\psi^{(\perp)}\rangle &= (C_2^*)^2 |\varphi_1\rangle |\varphi_1\rangle + (C_1^*)^2 |\varphi_2\rangle |\varphi_2\rangle - \\ &- C_1^* C_2^* (|\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle + |\varphi_2\rangle |\varphi_1\rangle) \rightarrow \\ &\rightarrow (C_2^*)^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + (C_1^*)^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle - \sqrt{2} C_1^* C_2^* |\Phi\rangle, \end{aligned} \quad (68)$$

где состояние $|\Phi\rangle$ должно быть точно таким же, как и в выражении (66). Для согласования процедур уничтожения (67) и (68) необходимо решить уравнение:

$$\begin{aligned} \text{const} &\times (C_2^* |\varphi_1\rangle |0\rangle - C_1^* |\varphi_2\rangle |0\rangle) = \\ &= (C_2^*)^2 |\varphi_1\rangle |0\rangle + (C_1^*)^2 |\varphi_2\rangle |0\rangle - \sqrt{2} C_1^* C_2^* |\Phi\rangle. \end{aligned}$$

Задача. Докажите, что процедуры (67) и (68) будут согласованы, если выбрать: $\text{const} = C_2^* - C_1^*$.

Исключением является случай, когда $C_2^* = C_1^*$ или $C_1 = C_2$. Для такого выбора констант процедура уничтожения не определена. Поэтому копию состояния

$$|\chi^{(2)}\rangle = \left| \psi \left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

невозможно уничтожить, так же как и копию состояния $|\chi^{(1)}\rangle$.

Задача. Покажите, что состояния $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ образуют базис в двумерном гильбертовом пространстве.

Если $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ являются базисом, то любое состояние $|\phi\rangle$ можно разложить по этому базису:

$$|\phi\rangle = \alpha |\chi^{(1)}\rangle + \beta |\chi^{(2)}\rangle.$$

Для завершения доказательства применим процедуру уничтожения к $|\phi\rangle|\phi\rangle$. С одной стороны она должна давать

$$|\phi\rangle|\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle|0\rangle = \left(\alpha |\chi^{(1)}\rangle + \beta |\chi^{(2)}\rangle\right)|0\rangle.$$

С другой стороны, эта процедура невыполнима, поскольку

$$\begin{aligned} |\phi\rangle|\phi\rangle &= \alpha^2 |\chi^{(1)}\rangle|\chi^{(1)}\rangle + \beta^2 |\chi^{(2)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle + \\ &+ \alpha\beta \left(|\chi^{(1)}\rangle|\chi^{(2)}\rangle + |\chi^{(2)}\rangle|\chi^{(1)}\rangle \right) \rightarrow ?, \end{aligned}$$

а уничтожение копий состояния $|\chi^{(1)}\rangle$ и $|\chi^{(2)}\rangle$ невозможно. Таким образом, невозможно уничтожить копию ни одного чистого состояния $|\phi\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. Анализ многомерного случая аналогичен двумерному. Его мы оставляем читателю. Теорема доказана.

Задача. Как изменится доказательство теоремы о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния, если принять во внимание вектор состояния $|A_\phi\rangle$ измерительного прибора?

Если уважаемый читатель внимательно прочел этот и предыдущий параграфы и понял все условия, при которых выполняются теоремы о невозможности клонирования и невозможности уничтожения, то он без труда решит следующую задачу.

Задача. Теорема о невозможности уничтожения говорит нам, что состояние $|\phi\rangle|\phi\rangle$ невозможно превратить в состояние $|\phi\rangle|0\rangle$. В то же самое время теорема о невозможности клонирования утверждает, что состояние $|\phi\rangle|\phi\rangle$ нельзя создать из состояния $|\phi\rangle|0\rangle$. Казалось бы, имеется противоречие, поскольку одна из теорем утверждает, что невозможно уничтожить такую систе-

му, про которую вторая теорема говорит, что ее нельзя создать. И наоборот. То есть на первый взгляд одна из теорем (а может быть, обе?) является бессмысленной. Так ли это на самом деле? Или обе теоремы все-таки могут выполняться одновременно?

Подсказка. В качестве первого шага при решении данной задачи покажите, что процедура приготовления квантовых ансамблей не противоречит теореме о невозможности клонирования. Затем поразмышляйте над тем, известно или нет состояние микросистемы в приготовленном квантовом ансамбле. После этого ответ на поставленный в задаче вопрос должен стать очевидным.

9.8. Правила суперотбора

При анализе принципа суперпозиции (26) возникает естественный вопрос: все ли состояния $|\psi\rangle$ в разложении (26) имеют физический смысл и могут быть реализованы на квантовых микросистемах? Или имеются дополнительные ограничения, которые отбирают лишь некоторые из всех математически возможных состояний $|\psi\rangle$? Впервые этот вопрос был поставлен в статье [39]. Там же дан и ответ: не все состояния микросистемы, которые можно записать при помощи принципа суперпозиции, имеют физический смысл и реализуются в Природе.

Рассмотрим простой, но несколько вычурный пример, иллюстрирующий сказанное выше. Пусть имеется одномерный мир на окружности длины L . В таком мире можно ввести оператор координаты $\hat{x}$ с непрерывным набором собственных векторов $|x_j\rangle$ и собственных значений x_j , отвечающих положению одномерной микрочастицы на окружности. Тогда вектор состояния $|\psi(x)\rangle$, отвечающий положению микрочастицы в точке x , может быть записан в виде разложения (26):

$$|\psi(x)\rangle = \sum_j C_j(x) |x_j\rangle.$$

В силу того что данный мир замкнут, должно выполняться интуитивно понятное условие, гарантирующее однозначность описания поведения микроча-

стицы в подобном мире: $|\psi(x+L)\rangle = e^{i\alpha} |\psi(x)\rangle$, где α — действительное число (нефизическая фаза). Это условие накладывает дополнительные (*не следующие из принципа суперпозиции!*) ограничения на коэффициенты $C_j(x)$. Подобные ограничения, которые обусловлены физикой задачи, а не следуют из принципа суперпозиции или любого другого постулата квантовой механики, называются **правилами суперотбора**.

Однако читатель может продолжать сомневаться в реальности правил суперотбора, поскольку приведенный выше пример не имеет прямого отношения к окружающему нас миру. Чтобы переубедить читателя, рассмотрим оператор заряда частицы $\hat{Q}$. Он следующим образом действует на зарядовые состояния электрона $|e^-\rangle$ и позитрона $|e^+\rangle$:

$$\hat{Q} |e^-\rangle = -e |e^-\rangle \quad \text{и} \quad \hat{Q} |e^+\rangle = +e |e^+\rangle,$$

где $e = |e| > 0$ — элементарный заряд. То есть, векторы $|e^-\rangle$ и $|e^+\rangle$ являются собственными векторами оператора $\hat{Q}$, которые образуют двумерное гильбертово пространство зарядов. Имеет ли в этом пространстве какой-либо физический смысл, например, вектор состояния вида $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}} (2|e^-\rangle + 3|e^+\rangle)$? Очевидно, что не имеет, поскольку средний электрический заряд микросистемы, описываемой таким вектором, равен $\langle Q \rangle_\psi = \left(-\frac{4}{13} + \frac{9}{13}\right) e = \frac{5}{13} e$. Однако в природе заряды всех микросистем и микрочастиц (исключая кварки, которые, впрочем, легко можно включить в данный пример непринципиальным изменением определений) кратны $|e|$. Кроме того, частица, которая находится в состоянии $|\psi\rangle$, должна очень нетривиально вести себя в постоянном магнитном поле. С вероятностью $4/13$ она должна вращаться в одну сторону, а с вероятностью $9/13$ — в противоположную. Ничего подобного ни в одном эксперименте не наблюдается. Таким образом, на состояния $|\psi\rangle$ необходимо наложить дополнительные условия, никак не связанные с принципом суперпозиции (26). Именно чтобы в пространстве зарядов векторы состояний физических систем были коллинеарны одному из базисных векторов.

Третий и последний пример, касающийся правил суперотбора, будет тесно связан с определением условной вероятности (37). Пусть монохроматический пучок света низкой интенсивности⁴⁰ проходит сквозь непрозрачный экран с тремя щелями. За этим экраном на некотором расстоянии находится еще один экран или детектор, с помощью которого может наблюдаться интерференционная картина. Схематически такая ситуация показана на рис. 28. Прохождению фотона через первую щель непрозрачного экрана сопоставим базисный вектор $|1\rangle$, через вторую — вектор $|2\rangle$, а через третью — вектор $|3\rangle$. Если пучок достаточно однороден, то вектор состояния фотонов до падения на экран с тремя щелями можно написать в виде

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle).$$

На пути от первого экрана до второго фотоны интерферируют друг с другом. Результат интерференции зависит от взаимного расположения щелей и расстояния между экранами. Предположим, что интерференционная картина на втором экране соответствует вектору состояния

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle),$$

условная вероятность возникновения которой $w(\varphi|\psi) = 1/9$.

Теперь поставим около щели «3» детектор фотонов и переставим экраны так, чтобы вектор состояния $|\varphi\rangle$ не изменился. Принцип суперпозиции, как и любой другой постулат квантовой теории, не запрещает нам это сделать. Тогда с какой вероятностью мы зарегистрируем, что фотон прошел через третью щель? Очевидно, что с вероятностью

$$w_3 = 1 - \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \varphi | (|1\rangle + |2\rangle) \right|^2 = 1 - 0 = 1,$$

⁴⁰Будем считать, что в каждый момент времени на экран со щелями падает только один фотон.

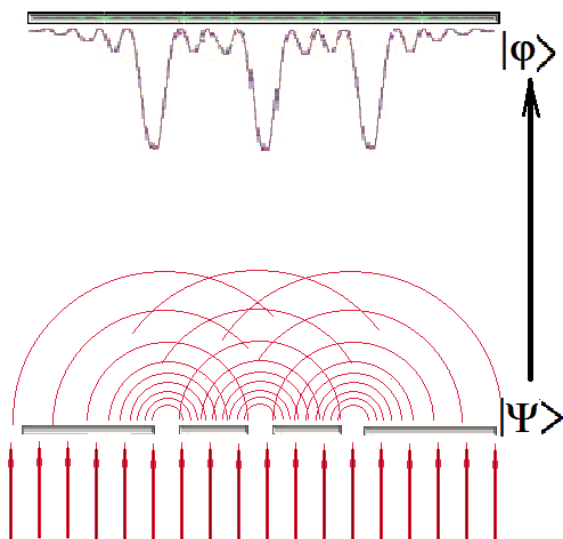


Рис. 28: Схематическое изображение трехщелевого эксперимента с заданными начальным $|\psi\rangle$ и конечным $|\varphi\rangle$ состояниями

то есть фотон всегда будет проходить через щель «3»! Но если фотон всегда проходит через одну щель, как же тогда может возникнуть интерференция? Однако на этом сюрпризы не заканчиваются. Поместим теперь детектор фотонов перед первой щелью и зададимся тем же самым вопросом про вероятность прохождения фотонов. Рассуждая аналогично получим, что $w_1 = 1$! Поскольку суммарная вероятность пройти фотону сквозь любую из трех щелей тоже равна единице, то приходим к очередному парадоксальному выводу, что вероятность прохождения фотона через вторую щель $w_2 = 1 - w_1 - w_3 = -1$. То есть мы получили отрицательную вероятность, которую невозможно измерить экспериментально! Однако никто нам не запрещает поставить детектор фотонов у второй щели. Тогда что он должен показать?

Данный результат можно интерпретировать следующим образом: хотя указанная нами экспериментальная ситуация формально не противоречит ни одному из постулатов квантовой теории, но ни в одном эксперименте она не может быть реализована. Следовательно, должны быть введены дополнительные правила суперотбора, которые бы запрещали такую ситуацию. Например правило, что в природе не возможны такие конфигурации макроприборов, которые приводят к отрицательным вероятностям для наблюдаемых величин⁴¹. Дальнейшее развитие этих рассуждений привело к созданию интерпретации квантовой механики в терминах **совместных историй** [40] и к попытке сформулировать квантовую механику при помощи понятий C^* - **алгебры** [41].

Задача. Докажите, что векторы состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|3\rangle$ образуют базис.

Задача. Прямым вычислением найдите $w(\varphi|\psi)$, w_1 и w_2 .

⁴¹Заметим, что в результате вычисления для одновременно ненаблюдаемых величин совместные вероятности в квантовой механике могут получиться отрицательными. Но такие вероятности не могут быть измерены по определению, а потому не имеют никакого физического смысла.