8. Описание прохождения линейно поляризованного света через призму Николя в формализме квантовой механики

В этом разделе мы вернемся к задаче, с которой начали построение аксиоматики квантовой механики: задаче о прохождении линейно поляризованного света через призму Николя (см. рис. 4). Из раздела 2 мы знаем, как эта система может быть рассмотрена с классической волновой и корпускулярной точек зрения. Теперь рассмотрим эту же систему с точки зрения квантовой теории.

Система рис. 4 представляет собой типичную двухуровневую систему. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ортонормированные векторы $|\, e\,\rangle$ и $|\, o\,\rangle$ образуют базис, по которому с точностью до общей нефизической (и ненаблюдаемой) фазы $e^{i\delta_e}$ (см. соответствующее обсуждение в параграфе 5.2) может быть разложено любое состояние $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ линейно поляризованного света:

$$|\,\gamma(\alpha)\,\rangle \;=\; \cos\alpha\,|\,e\,\rangle \;+\; \sin\alpha\, e^{i\delta}\,|\,o\,\rangle\,.$$

В самом общем виде оператор интенсивности можно записать как

$$\hat{I}_i \;=\; I_e\,\hat{P}_e \;+\; I_o\,\hat{P}_o \;=\; \hat{I}_e \;+\; \hat{I}_o,$$

где I_e и I_o — собственные значения оператора $\hat{I}$, отвечающие собственным векторам $|\, e\,\rangle$ и $|\, o\,\rangle$ соответственно; $\hat{P}_e$ и $\hat{P}_o$ — проекторы на эти состояния; $\hat{I}_e$ и $\hat{I}_o$ — операторы интенсивности необыкновенного и обыкновенного лучей. Чтобы найти значения I_e и I_o, надо привлечь дополнительные физические соображения. Известно, что если на призму Николя падает пучок фотонов, поляризованных под углом α к оптической оси призмы (описывается вектором состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$), то среднее значение интенсивности необыкновенного луча, вышедшего из призмы, равно $I_i\cos^2\alpha$, а обыкновенного — $I_i\sin^2\alpha$. При помощи Постулата №5 и формулы (39) эти условия можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle\, I_e \,\rangle_{\gamma(\alpha)} &= \left\langle\, \gamma(\alpha) \,\middle|\, \hat{I}_e \,\middle|\, \gamma(\alpha) \,\right\rangle = I_i \cos^2\alpha \\ \langle\, I_o \,\rangle_{\gamma(\alpha)} &= \left\langle\, \gamma(\alpha) \,\middle|\, \hat{I}_o \,\middle|\, \gamma(\alpha) \,\right\rangle = I_i \sin^2\alpha \end{aligned} \right. . \tag{48}$$

Задача. Показать, что условия (48) ведут к следующим выражениям для операторов $\hat{I}_e$, $\hat{I}_o$ и $\hat{I}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{I}_e &= I_i\,\hat{P}_e, \\ \hat{I}_o &= I_i\,\hat{P}_o, \\ \hat{I}_i &= I_i\,\hat{1}. \end{aligned} \tag{49}$$

Если выбрать базис, в котором вектор $|\, e \,\rangle$ записан в виде столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а вектор $|\, o \,\rangle$ — в виде столбца $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то любое состояние $|\, \gamma(\alpha) \,\rangle$ в таком базисе имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\delta} \end{pmatrix}$. Операторам необыкновенного и обыкновенного лучей соответствуют матрицы

$$\hat{I}_e = I_i\,\hat{P}_e = I_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \hat{I}_o = I_i\,\hat{P}_o = I_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Поэтому такое представление называется **матричным**, или **энергетическим**, представлением. Отметим, что в матричном представлении вычисление среднего сводится к хорошо известному из линейной алгебры перемножению векторов и матриц. Например,

$$\begin{aligned} \langle\, I_e \,\rangle_{\gamma(\alpha)} &= \left\langle\, \gamma(\alpha) \,\middle|\, \hat{I}_e \,\middle|\, \gamma(\alpha) \,\right\rangle = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha\, e^{-i\delta} \end{pmatrix} I_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\delta} \end{pmatrix} = I_i \cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Задача. Вычислить $\langle\, I_o \,\rangle_{\gamma(\alpha)}$.

Внимательный читатель, несомненно, заметил сходство между матричным представлением и волновым описанием прохождения линейно поляризованного света через призму Николя, которое мы разбирали в параграфе 2.1. Это сходство не случайно, ведь в данном представлении *математическое выражение* для вектора состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ с точностью до коэффициента совпадает с записью вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_i(t)$. Оба вектора несут информацию о поляризации начального пучка света. Следовательно, интенсивности необыкновенного и обыкновенного лучей должны выражаться через компоненты этих векторов. Необходимые компоненты выделяются при действии на векторы $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ и $\vec{E}_i(t)$ проекционными операторами (или матрицами необыкновенного и обыкновенного лучей в терминах параграфа 2.1) $\hat{P}_e \equiv \hat{\mathcal{I}}_e$ и $\hat{P}_o \equiv \hat{\mathcal{I}}_o$.

Однако вектор состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ гораздо более универсальный объект, чем вектор напряженности $\vec{E}_i(t)$. Действительно, вектор состояния $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ никак не привязан к тому, что свет — это волна. С помощью разложения $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$ по базису можно вычислить вероятность регистрации обыкновенного или необыкновенного фотона в ситуации, когда плотность пучка фотонов столь мала, что в каждый конкретный момент между поляризатором и призмой находится только один фотон (сравните с экспериментом Бибермана–Сушкина–Фабриканта [24]). Но в классической физике вычисление такой вероятности (и то, для достаточно интенсивных пучков, в которых можно пренебречь флуктуациями числа фотонов) — прерогатива корпускулярного подхода из параграфа 2.2. В таком подходе вектора $\vec{E}_i(t)$ просто не существует как физического понятия.

Таким образом, на базе концепции вероятности и обобщения обычного координатного пространства до гильбертова пространства состояний квантовая механика объединила два понятия «волна» и «частица», различных с точки зрения макроскопического мира, в одно универсальное понятие «микросистема». В качестве синонима термину «микросистема» в литературе по квантовой механике употребляются термины «микрочастица» или «микрообъект». Эти термины не очень удачны, поскольку на подсознательном уровне заставляют представлять себе любую микросистему в виде классической точки или шарика, что не только неверно, но и вредно! Довольно часто подобные наивные «шарико-частичные» представления могут привести к неверным выводам относительно поведения микросистем.

Задача. Для более глубокого понимания отличия аксиом квантовой механики от наивного «шарико-частичного» представления попробуйте истолковать все полученные выше аксиомы квантовой физики сначала в волновом, а затем в корпускулярном подходе. Покажите, что волновой подход не может быть согласован с проекционным постулатом М. Борна, а корпускулярный подход пасует перед принципом суперпозиции[28].

Вернемся к вопросу о возможности приготовления квантовых ансамблей при помощи макроприборов. В данном разделе таким макроприбором выступал поляризатор. Из падающего на него неполяризованного пучка света он готовил состояния с определенной поляризацией. А узнавали мы об этом, когда подвергали данное состояние измерению при помощи призмы Николя. То, что интенсивность необыкновенного луча при разных значениях угла между оптической осью поляризатора и оптической осью призмы всегда подчинялась закону $\cos^2\alpha$, а интенсивность обыкновенного луча — закону $\sin^2\alpha$, как раз и говорит о том, что прошедший поляризатор пучок имеет одну и ту же поляризацию в любой момент времени. Работу николя можно независимо проверить при помощи других оптических приборов. И так далее. Если в конце концов находится макроприбор, в правильной работе которого мы не имеем ни малейших сомнений, то мы должны согласиться, что при помощи макроскопического поляризатора можно приготовлять наборы совершенно одинаковых микроскопических состояний с заранее известными свойствами. Это рассуждение проходит в случае, если все макроскопические приборы абсолютно идеальные. Но в реальной жизни так не бывает.

[28]На самом деле решение данной задачи уже содержится в разных параграфах учебного пособия. Но нам представляется полезным, чтобы читатель свел вместе всю эту информацию и еще раз осознал глубину, общность и красоту аксиоматики квантовой теории.

Наконец, обозначим тут один тонкий вопрос, более подробный разбор которого отложим до будущих учебных пособий. Насколько вероятностный подход и вероятностные предсказания присущи микромиру и микрообъектам? Любой читатель, внимательно изучивший данное пособие, без колебаний ответит, что без вероятностного подхода квантовая механика вообще не может состояться как наука, поскольку только вероятностная интерпретация совместима с принципом суперпозиции и проекционным постулатом М. Борна. Но быть может, символы измерения Швингера, принцип суперпозиции и проекционный постулат отражают лишь тот факт, что макроприборы слишком грубы для изучения микромира, а квантовая механика покорно смиряется с такой грубостью? Быть может, если бы наши приборы оказались более чувствительными, то с их помощью мы бы смогли измерить некоторые дополнительные «тонкие» характеристики микросистемы, знание которых позволило бы нам создать полностью детерминистскую теорию микромира в духе ньютоновской механики? Подобный подход носит название **концепции скрытых параметров** в квантовой механике [25, 26, 27]. В настоящее время вопрос о существовании или отсутствии скрытых параметров остается дискуссионным [28], а значит, у вас, дорогой читатель, есть шанс сделать фундаментальный вклад в квантовую теорию[29].

[29]Отметим, что в параграфе 2.2 мы один раз неявно уже пользовались концепцией скрытых параметров, когда попытались заменить фотоны, обладающие векторной поляризацией, на фотоны со скалярными поляризациями двух типов, которые якобы приготовляются поляризатором. Сделано это было как раз для того, чтобы избавиться от неожиданно появившихся фундаментальных вероятностей в угоду классическому детерминизму.