6. Операторы физических величин

Перед тем как приступить к чтению данного раздела, советуем освежить знания относительно эрмитовых операторов и их свойств.

Пусть микросистема обладает наблюдаемой A и находится в состоянии $|\,\psi\,\rangle$. Например, рассмотрим пучок света (фотонов), прошедший поляризатор в оптической системе на рис. 4. Роль наблюдаемой в такой микросистеме выполняет интенсивность, а состояние пучка описывается вектором $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$.

В результате детектирования квантового ансамбля при помощи макроприбора, обладающего набором символов измерения $\{\hat{\mathcal{P}}_{a_i}\}$, стало известно, что наблюдаемая A обладает спектром значений $\{a_j\}$, а вероятность измерения каждого значения спектра равна w_j. Вероятности w_j, очевидно, зависят как от типа измерительного прибора, так и от состояния микросистемы $|\,\psi\,\rangle$ [24]. На рис. 4 роль макроприбора играет призма Николя, разделяющая начальный пучок на необыкновенный и обыкновенный лучи с вероятностями $w_e = \cos^2\alpha$ и $w_o = \sin^2\alpha$ соответственно. Необыкновенный и обыкновенный лучи, получившиеся после прохождения пучка линейно поляризованного света через николь, также являются примерами микросистем, каждая из которых описывается вектором состояния $|\,e\,\rangle$ и $|\,o\,\rangle$ соответственно. Для них макроприборами являются ФЭУ.

---

[24] Естественно предположить, что для определения спектра значений наблюдаемой A используется макроприбор, символы измерения которого удовлетворяют условию $\sum\limits_i \hat{\mathcal{P}}_{a_i} = \hat{1}$. Очевидно, что число значений a_j не превышает числа символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_i}$, однако эти числа не обязательно совпадают между собой. Действительно, нескольким различным символам измерения может соответствовать одно и то же значение спектра. Поясним сказанное простым примером. Пусть измеряется импульс нерелятивистской частицы $\vec{p}$, а в качестве наблюдаемой выбирается кинетическая энергия $T = \vec{p}^{\,2}/2m$. Тогда символам измерения импульсов $\vec{p}_1 = \vec{P}$ и $\vec{p}_2 = -\vec{P}$ соответствует одно и тоже значение в спектре кинетической энергии $T = \vec{P}^{\,2}/2m$.

Среднее значение наблюдаемой A в состоянии $|\,\psi\,\rangle$ можно найти по хорошо известной формуле

$$\langle\, A\,\rangle_\psi \;=\; \sum_j w_j\, a_j, \tag{38}$$

то есть суммированием по всему спектру наблюдаемой A, где каждое значение спектра a_j берется со своей вероятностью (иначе говорят, со своим весом) w_j.

Задача. Обоснуйте эту формулу в корпускулярном подходе при помощи частотного определения вероятности.

Согласно Постулату №4 и формуле (34) выражение для $\langle\, A\,\rangle_\psi$ можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\langle\, A\,\rangle_\psi \;&=\; \sum_j |C_j|^2\, a_j \;=\; \sum_j \langle\,\psi\,|\;a_j\,\rangle\,\langle\, a_j\,|\;\psi\,\rangle\; a_j \;= \\
&=\; \sum_j \langle\,\psi\,|\;a_j\,\rangle\; a_j\;\langle\, a_j\,|\;\psi\,\rangle \;= \\
&=\; \langle\,\psi\,|\;\left(\sum_j |\,a_j\,\rangle\; a_j\;\langle\, a_j\,|\right)\;|\,\psi\,\rangle \;=\; \left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{A}\,\middle|\,\psi\,\right\rangle,
\end{aligned}$$

где $\hat{A} \;=\; \sum\limits_j |\,a_j\,\rangle\; a_j\;\langle\, a_j\,|$ — оператор, который в квантовой теории должен быть сопоставлен наблюдаемой A. Оператор $\hat{A}$ действует в гильбертовом пространстве векторов состояния данной микросистемы. Поскольку вектор $|\,a_j\,\rangle$ и число a_j, очевидно, коммутируют между собой, то оператор $\hat{A}$ может быть переписан через проекционные операторы $\hat{P}_{a_j} = |\,a_j\,\rangle\,\langle\, a_j\,|$ в виде

$$\hat{A} = \sum_j a_j\, \hat{P}_{a_j}.$$

Докажем, что $\hat{A}$ — **эрмитов оператор**. Очевидно, что проекционный оператор является частным случаем эрмитового оператора. Кроме того, величины a_j

суть действительные числа, поскольку их значения измеряются в эксперименте, а стрелка макроприбора или макроскопический цифровой датчик могут показать только действительную величину. Тогда

$$\hat{A}^\dagger = \sum_j \left(a_j\,\hat{P}_{a_j}\right)^\dagger = \sum_j \hat{P}^\dagger_{a_j}\,a^*_j = \sum_j \hat{P}_{a_j}\,a_j = \sum_j a_j\,\hat{P}_{a_j} = \hat{A},$$

что и требовалось доказать.

Задача. Докажите, что векторы $|\,a_j\,\rangle$ являются собственными векторами оператора $\hat{A}$, отвечающими собственным значениям a_j.

Поэтому оператор, отвечающий любой наблюдаемой характеристике микросистемы A, обладает точно такими же свойствами, какими обладает эрмитов оператор. Еще раз перечислим важнейшие из этих свойств:

1. Собственные векторы оператора любой наблюдаемой физической величины образуют базис в гильбертовом пространстве векторов состояния рассматриваемой квантовой системы. Очевидно, что большинство микросистем имеет сразу несколько наблюдаемых. Поэтому в пространстве векторов состояния может быть построено несколько различных базисов (или представлений), по которым можно разложить любой вектор состояния микросистемы $|\,\psi\,\rangle$.

2. Средние значения любой наблюдаемой A в любом допустимом состоянии микросистемы $|\,\psi\,\rangle$ являются действительными числами. Это утверждение следует из свойств эрмитового оператора $\hat{A}$. Например, начальная интенсивность пучка линейно поляризованных фотонов I_i в эксперименте на рис. 4 всегда действительная (более того, в данном конкретном примере — всегда неотрицательная) величина, каково бы ни было состояние $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$.

Утверждение о том, что каждой наблюдаемой в квантовой механике соответствует эрмитов оператор, было доказано практически без использования «очевидных допущений», взятых из эксперимента. Самым большим таким допущением стало условие действительности коэффициентов a_j. Поскольку мы стремимся построить квантовую теорию не на основании «очевидных допущений», а на основе некоторого количества четко сформулированных аксиом, то суммируем результаты этого раздела в виде очередного постулата квантовой механики.

Постулат №5, или **постулат о соответствии наблюдаемых величин и операторов**. *Любая микросистема обладает хотя бы одной экспериментально наблюдаемой и измеряемой физической величиной, которая для краткости называется* ***наблюдаемой****. В квантовой механике любой наблюдаемой A ставится в соответствие эрмитов оператор $\hat{A}$, так что среднее значение этой наблюдаемой в любом допустимом состоянии $|\,\psi\,\rangle$ определяется по формуле*

$$\langle\, A\,\rangle_\psi \,=\, \left\langle\, \psi \,\middle|\, \hat{A} \,\middle|\, \psi \,\right\rangle . \tag{39}$$

В заключение сделаем еще три замечания. **Первое**. Если известно среднее значение наблюдаемой A, то можно найти среднее значение любой гладкой функции от этой наблюдаемой. **Второе**. Формула (39) справедлива только в том случае, когда микросистема замкнута, а все измерительные приборы абсолютно идеальные. Наконец, **третье**. Формула (39) дает рецепт вычисления среднего наблюдаемой A. Но без конкретизации вида оператора $\hat{A}$ и вектора состояния $|\,\psi\,\rangle$ (например, в виде дифференциальных операторов и функций или в виде матриц и столбцов) невозможно провести ни одного вычисления для конкретных микросистем. Поиск явного вида операторов координаты, импульса, энергии, орбитального момента и спина, равно как и состояний, на которые они действуют, представляет собой нетривиальную задачу. Ее решению будут посвящены другие учебные пособия этого курса.

Задача. Показать, что формула (39) может быть переписана в виде

$$\langle\, A\,\rangle_\psi \,=\, \mathrm{Tr}\, \left(\hat{P}_\psi\, \hat{A}\right) . \tag{40}$$

Задача. Рассмотрим наблюдаемую A, спектр которой состоит всего из двух значений $a_1 = 5$ и $a_2 = 1/6$. Этим значениям отвечают базисные векторы $|\, a_1 \,\rangle$ и $|\, a_2 \,\rangle$ соответственно. Пусть некоторая квантовая система находится в состоянии $|\, \psi \,\rangle \; = \; \dfrac{1}{\sqrt{10}} \; (|\, a_1 \,\rangle \; + \; 3\,|\, a_2 \,\rangle)$. При помощи определения (39) вычислить, чему равны:

а) среднее значение наблюдаемой A в состоянии $|\, \psi \,\rangle$;

б) дисперсия наблюдаемой A, которая задается формулой

$$D_A = \sqrt{\left\langle \left(\hat{A} - \langle\, A \,\rangle_\psi\right)^2 \right\rangle_\psi}.$$

Задача. В базисе векторов $|\, a_1 \,\rangle$ и $|\, a_2 \,\rangle$ из предыдущей задачи найти явный вид проектора $\hat{P}_\psi$ и вычислить $\langle\, A \,\rangle_\psi$ при помощи выражения (40).

Задача. Как надо модифицировать формулу (40), чтобы вычислить $\left\langle\, A^2 \,\right\rangle_\psi$?