4. Принцип суперпозиции

Формула (17) задает правило умножения символов $| a_j >$. В настоящем разделе мы найдем правило сложения символов $| a_j >$, которое получило название **принципа суперпозиции.**

Для этого рассмотрим эксперимент с поляризаторами, призмой Николя и ФЭУ, показанный на рис. 15. Неполяризованный пучок света падает на поляризатор, оптическая ось которого составляет угол a с оптической осью призмы Николя. После прохождения поляризатора линейно-поляризованный пучок падает на николь и расщепляется на необыкновенный е и обыкновенный o лучи. Оба луча проходят через поляризаторы, идентичные первому поляризатору по составу материала и ориентации в пространстве оптических осей. Затем интенсивности обоих лучей регистрируются ФЭУ, а результаты измерений суммируются. Если заключить поляризаторы и призму Николя в «черный ящик», то с точки зрения внешнего наблюдателя этот «черный ящик» должен быть эквивалентен одному или двум одинаково ориентированным поляризаторам.

Действительно, сопоставим каждому поляризатору символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_\alpha = |\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,|$, который показывает, что вышедшие из поляризатора фотоны (γ) линейно поляризованы под углом α к оптической оси призмы Николя. Из рис. 15 видно, что призме Николя в данной конфигурации соответствует единичный символ $\hat{1} = \hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_o$, поскольку она работает точно так же, как и конструкция на рис. 6. Тогда символ измерения, отвечающий «эксперименту» рис. 15, может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\Big(\hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \hat{\mathcal{P}}_e \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha\Big) \oplus \Big(\hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \hat{\mathcal{P}}_o \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha\Big) &= \hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \Big(\hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_o\Big) \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha = \\ &= \hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \hat{1} \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha = \hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha = \hat{\mathcal{P}}_\alpha,\end{aligned}$$

то есть совпадает с символом измерения одного или двух одинаково ориентированных поляризаторов.

С другой стороны, используя (16), символ измерения для «мысленного эксперимента» рис. 15 можно записать в виде следующей цепочки преобразований:

$$\begin{aligned}\Big(|\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,|\Big) \otimes \Big(|\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,|\Big) &= \hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha = \\ &= \Big(\hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \hat{1}\Big) \otimes \Big(\hat{1} \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha\Big) = \\ &= \Big(\hat{\mathcal{P}}_\alpha \otimes \Big(\hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_o\Big)\Big) \otimes \Big(\Big(\hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_o\Big) \otimes \hat{\mathcal{P}}_\alpha\Big) = \\ &= \Big(|\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,| \otimes (|\,e\,\rangle\,\langle\,e\,| \oplus |\,o\,\rangle\,\langle\,o\,|)\Big) \otimes \\ &\qquad \otimes \Big((|\,e\,\rangle\,\langle\,e\,| \oplus |\,o\,\rangle\,\langle\,o\,|) \otimes |\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,\langle\,\gamma(\alpha)\,|\Big) = \\ &= |\,\gamma(\alpha)\,\rangle\, \Big(C_e^\dagger(\alpha)\,\langle\,e\,| \oplus C_o^\dagger(\alpha)\,\langle\,o\,|\Big) \otimes \\ &\qquad \otimes \Big(|\,e\,\rangle\, C_e(\alpha) \oplus |\,o\,\rangle\, C_o(\alpha)\Big)\, \langle\,\gamma(\alpha)\,|\,.\end{aligned}$$

Сравнение начального и конечного выражений данной цепочки показывает, что:

$$\begin{cases} |\,\gamma(\alpha)\,\rangle \;=\; |\,e\,\rangle\, C_e(\alpha) \,\oplus\, |\,o\,\rangle\, C_o(\alpha) \\ \langle\,\gamma(\alpha)\,| \;=\; C_e^\dagger(\alpha)\,\langle\,e\,| \,\oplus\, C_o^\dagger(\alpha)\,\langle\,o\,| \end{cases}, \tag{21}$$

где введены новые обозначения

$$\begin{aligned} C_e(\alpha) &= \langle\,e\,| \otimes |\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,, \qquad & C_e^\dagger(\alpha) &= \langle\,\gamma(\alpha)\,| \otimes |\,e\,\rangle\,, \\ C_o(\alpha) &= \langle\,o\,| \otimes |\,\gamma(\alpha)\,\rangle\,, \qquad & C_o^\dagger(\alpha) &= \langle\,\gamma(\alpha)\,| \otimes |\,o\,\rangle\,. \end{aligned}$$

Из (21) следует, что символы $|\,\gamma(\alpha)\,\rangle$, $|\,e\,\rangle$ и $|\,o\,\rangle$ суть величины одной природы, поскольку при $\alpha = 0$ символ $|\,\gamma\,\rangle$ совпадает с символом $|\,e\,\rangle$, а при выборе $\alpha = \pi/2$ — с символом $|\,o\,\rangle$. Из свойств призмы Николя ясно, что поворот оси призмы на угол $\pi/2$ переводит символ $|\,e\,\rangle$ в символ $|\,o\,\rangle$ и наоборот. Аналогичное рассуждение можно провести для символов $\langle\,\gamma(\alpha)\,|$, $\langle\,e\,|$ и $\langle\,o\,|$.

Выражение (21) легко поддается обобщению. Если символы $|\,a_j\,\rangle$ подчиняются правилу умножения (17) и если $\sum\limits_j \hat{\mathcal{P}}_{a_j} = \hat{1}$, то любой символ $|\,\psi\,\rangle$ может быть **разложен в суперпозицию**

$$|\,\psi\,\rangle \;=\; |\,a_1\,\rangle\, C_1 \,\oplus\, \ldots \,\oplus\, |\,a_j\,\rangle\, C_j \,\oplus\, \ldots\,, \tag{22}$$

а любой символ $\langle\,\psi\,|$ — в суперпозицию

$$\langle\,\psi\,| \;=\; C_1^\dagger\,\langle\,a_1\,| \,\oplus\, \ldots \,\oplus\, C_j^\dagger\,\langle\,a_j\,| \,\oplus\, \ldots\,, \tag{23}$$

где $C_j = \langle\,a_j\,| \otimes |\,\psi\,\rangle$ и $C_j^\dagger = \langle\,\psi\,| \otimes |\,a_j\,\rangle$. Символы $|\,\psi\,\rangle$, $|\,a_j\,\rangle$, $\langle\,\psi\,|$ и $\langle\,a_j\,|$ имеют одинаковую природу.

Таким образом, природа как символов измерения, так и их половинок $|\,\psi\,\rangle$ или $|\,a_j\,\rangle$ абсолютно не зависит от физической реализации измерительного прибора и деталей процесса измерения, которым эти символы сопоставлены.

В заключение этого раздела еще раз подчеркнем, что принцип суперпозиции в форме (22) или (23) является следствием не только законов сложения и умножения символов измерения (которые почти неизбежно возникают из логики измерения свойств микросистемы при помощи макроприборов), но и следствием гораздо менее обоснованного предположения, что символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$ по аналогии с проекционным оператором может быть записан в форме (16).

Задача. Исследовать свойства операции «†».