3. Символы измерения и операции над ними

В данном разделе мы приступаем к обоснованию аксиоматики квантовой теории и созданию на ее основе математического аппарата нерелятивистской квантовой механики. В качестве примера, дающего наглядную интерпретацию основных шагов в этом направлении, будем рассматривать процедуру измерения интенсивностей и поляризаций пучков фотонов, проходящих через поляризаторы и призмы Николя.

3.1. Определение наблюдаемых и символов измерения

Пусть микрочастица обладает некоторой физической характеристикой A, которую возможно измерить экспериментально. Это может быть энергия, импульс, поляризация или любая другая характеристика микрочастицы. Такую характеристику будем называть **наблюдаемой величиной**, или просто **наблюдаемой**. Пусть макроскопические приборы измеряют одно из возможных значений a_1, a_2, ..., a_j и т. д. этой наблюдаемой величины. Совокупность *макроскопически различимых* значений $\{a_i\}$ наблюдаемой A будем называть **спектром** наблюдаемой[19]. Например, для пучка фотонов, прошедших призму Николя, наблюдаемой величиной является интенсивность света I. Интенсивности необыкновенного I_e и обыкновенного I_o лучей образуют спектр этой наблюдаемой. Какая из интенсивностей относится к необыкновенному лучу, а какая относится к лучу обыкновенному, можно различить при помощи макроприборов.

Каждому измерению наблюдаемой A сопоставим символ измерения (иначе — символ измерения Швингера) $\hat{\mathcal{P}}$ по следующему правилу. Пусть неко-

[19]Возможно, читатель уже уловил определенную аналогию между спектром наблюдаемой и спектром линейного оператора. Эта аналогия не случайна. При дальнейшем изложении аналогия между символами измерения и операторами будет только усиливаться.

Для упрощения изложения предполагается, что наблюдаемая A имеет дискретный спектр. Обобщение на непрерывный спектр не представляет труда. Поэтому мы предлагаем читателю сделать такое обобщение самостоятельно.

торый макроприбор выделяет из всего спектра наблюдаемой A только одно значение a_i. Тогда сопоставим такому макроприбору символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_i}$. На рис. 5 показан пример макроприбора. После установки непрозрачной заглушки на пути обыкновенного луча получается макроприбор для измерения интенсивности необыкновенного луча. Этому макроприбору поставим в соответствие символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Если макроприбор позволяет регистрировать весь спектр наблюдаемой одновременно, то ему естественно сопоставить символ единичного измерения, который мы будем обозначать через $\hat{1}$. На рис. 6 показан макроприбор, при помощи которого можно измерять вместе интенсивности обыкновенного и необыкновенного лучей. Это пример макроприбора с единичным символом измерения. Наконец, если макроприбор не регистрирует ни одно из возможных значений наблюдаемой A, то ему должен соответствовать символ нулевого измерения $\hat{0}$. На рис. 7 показан макроприбор, который состоит из николя и двух непрозрачных заглушек на пути обыкновенного и необыкновенного лучей. Очевидно, что работа такого макроприбора описывается символом нулевого измерения.

Задача. Реализуйте символы измерений $\hat{\mathcal{P}}_e$, $\hat{1}$ и $\hat{0}$, используя вместо непрозрачных заглушек поляризаторы.

Чтобы сделать дальнейшие предположения о математической природе символов измерения, изучим, какими свойствами они должны обладать с точки зрения описания совокупности измерений.

3.2. Произведение символов измерения

Поставим друг за другом две призмы Николя с заглушкой для обыкновенного луча, как это показано на рис. 8. Очевидно, что необыкновенный луч, прошедший первую призму, без изменения пройдет и вторую. С точки зрения символов измерения две призмы Николя, стоящие друг за другом, соответствуют ***последовательному применению*** двух символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Такую конструкцию мы будем называть **произведением двух символов измерения**

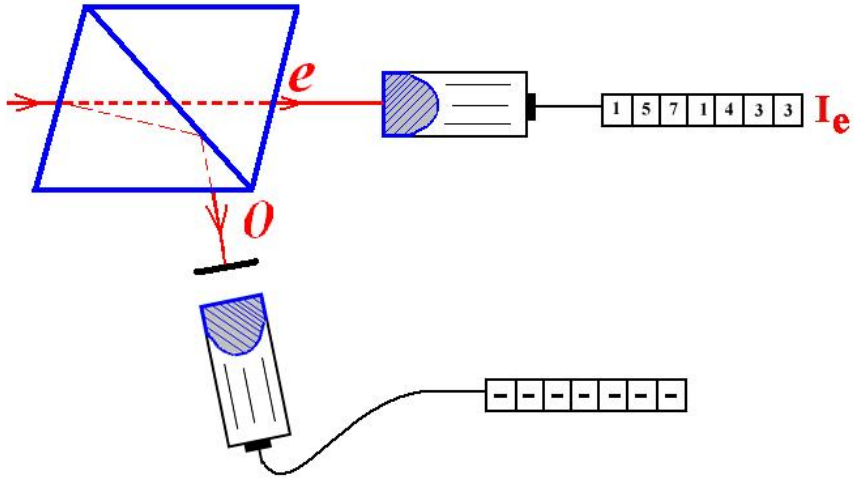


Рис. 5: Макроприбор для измерения интенсивности I_e необыкновенного луча e. Прибор состоит из призмы Николя, снабженной непрозрачной заглушкой на пути обыкновенного луча o. Такому макроприбору соответствует символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$

и записывать как $\hat{\mathcal{P}}_e \otimes \hat{\mathcal{P}}_e$. Если обе призмы поместить в «черный ящик»[20], то такой измерительный прибор должен работать точно так же, как одна призма Николя с заглушкой для обыкновенного луча. То есть ему должен соответствовать один символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Таким образом, находим следующее правило

[20]Обычно «черным ящиком» называют нечто, имеющее вход и выход. Как связаны между собой вход и выход «черного ящика» — неизвестно. Его нельзя открыть и изучить его внутреннее устройство. Единственное, что можно делать, это подавать на вход «черного ящика» разные последовательности сигналов (например, пучки света) и изучать свойства сигналов на выходе. Понятие «черного ящика» широко используется в электротехнике и схемотехнике.

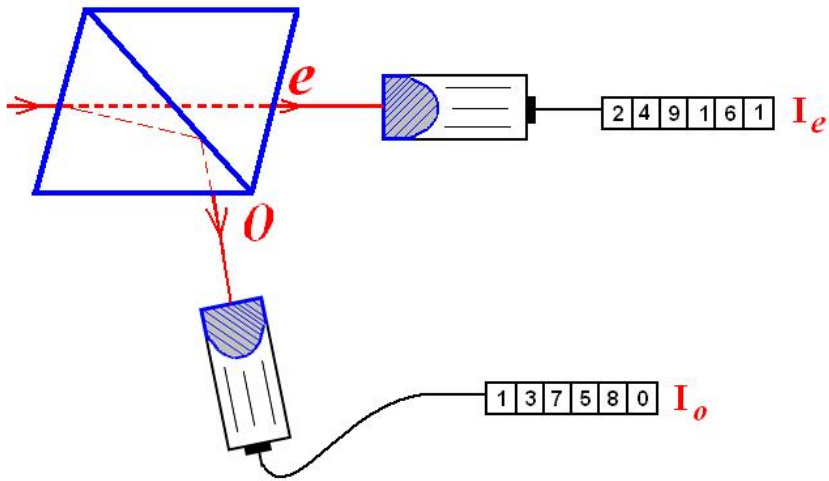


Рис. 6: Макроприбор для совместного измерения интенсивностей I_e необыкновенного и I_o обыкновенного лучей. Обе эти интенсивности составляют полный спектр интенсивности поляризованных пучков. Поэтому такому макроприбору соответствует единичный символ измерения $\hat{1}$

для произведения одинаковых символов измерения:

$$\hat{\mathcal{P}}_e \otimes \hat{\mathcal{P}}_e \equiv \hat{\mathcal{P}}_e^2 = \hat{\mathcal{P}}_e. \tag{5}$$

Символ «$\otimes$» использован в формуле (5), чтобы подчеркнуть, что умножение символов измерения, вообще говоря, может отличаться от тех типов умножений, которые известны читателям из математических курсов. Его также не следует отождествлять с операцией прямого произведения.

Задача. Чему равны $\hat{\mathcal{P}}_e^n$ и $\hat{\mathcal{P}}_o^n$?

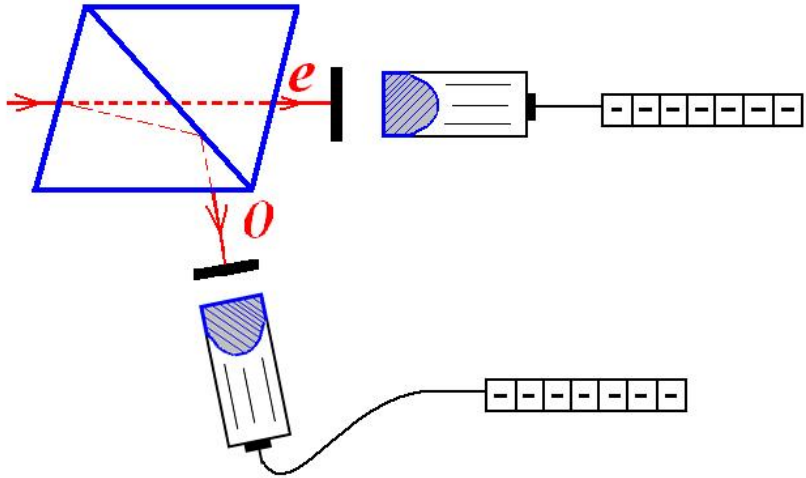


Рис. 7: Пример макроприбора, соответствующего нулевому символу измерения $\hat{0}$. Он состоит из призмы Николя и двух непрозрачных заглушек, поставленных на пути необыкновенного e и обыкновенного o лучей

Для вдумчивых читателей заметим, что если сравнить между собой рис. 5, на котором изображен макроприбор для символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$, и рис. 8, на котором показан макроприбор для символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_e^2$, то можно заметить определенное несоответствие между двумя рисунками. У левой призмы на рис. 8 отсутствует ФЭУ, измеряющий интенсивность необыкновенного луча. Вместо него стоит вторая призма Николя. Поэтому, строго говоря, первой призме и первому ФЭУ с заглушкой не отвечает символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. И формула (5) для такого макроприбора, вообще говоря, не имеет места. Однако данная ситуация легко поправима. Макроприбор рис. 5 можно модернизировать, поставив на пути необыкновенного луча полупрозрачное зеркало, а не ФЭУ. Но-

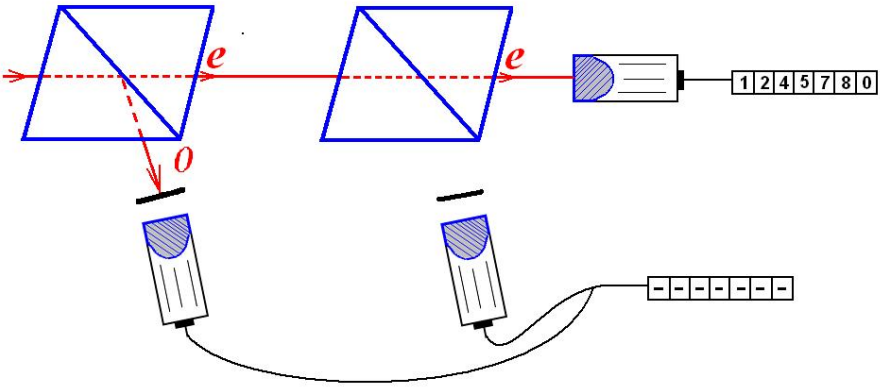


Рис. 8: Экспериментальная реализация формулы (5) для произведения двух символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$

вый вариант макроприбора показан на рис. 9. Пусть зеркало пропускает сквозь себя без изменения поляризации 99,999% интенсивности необыкновенного луча. А оставшиеся 0,001% — отражает. И этот отраженный свет попадает в ФЭУ. Понятно, что умножив показания идеального ФЭУ рис. 9 на нормировочный множитель 100 000, мы воспроизведем показания ФЭУ рис. 5. Тогда рис. 8 легко изменить, чтобы он соответствовал формуле (5). Исправленная версия макроприбора показана на рис. 10.

Введение полупрозрачных зеркал, которое требует формальное строгое рассмотрение предложенных выше «мысленных экспериментов», загромождает лишними элементами и без того сложные рисунки. Поэтому в дальнейшем мы откажемся от изображения полупрозрачных зеркал в пользу простоты и интуитивной ясности.

Заметим, что различие между рис. 5 и 9 можно трактовать как чисто методологическое. Действительно, в различных интерпретациях математического формализма квантовой механики нет однозначного ответа на вопрос: «*на каком шаге в макроприборе непосредственно происходит измерение состояния*

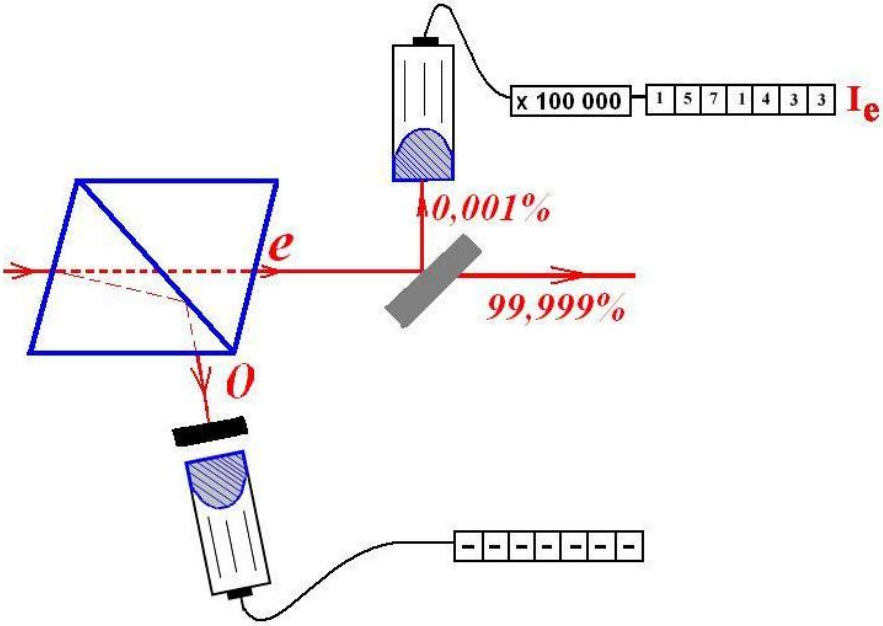


Рис. 9: Модифицированный макроприбор для измерения интенсивности I_e. Прибор состоит из призмы Николя, снабженной непрозрачной заглушкой для обыкновенного луча o, и полупрозрачного зеркала, стоящего на пути необыкновенного луча e. Зеркало пропускает без изменения поляризации 99,999% интенсивности необыкновенного луча, а 0,001% направляет на ФЭУ. Такому макроприбору, как и макроприбору на рис. 5, соответствует символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$

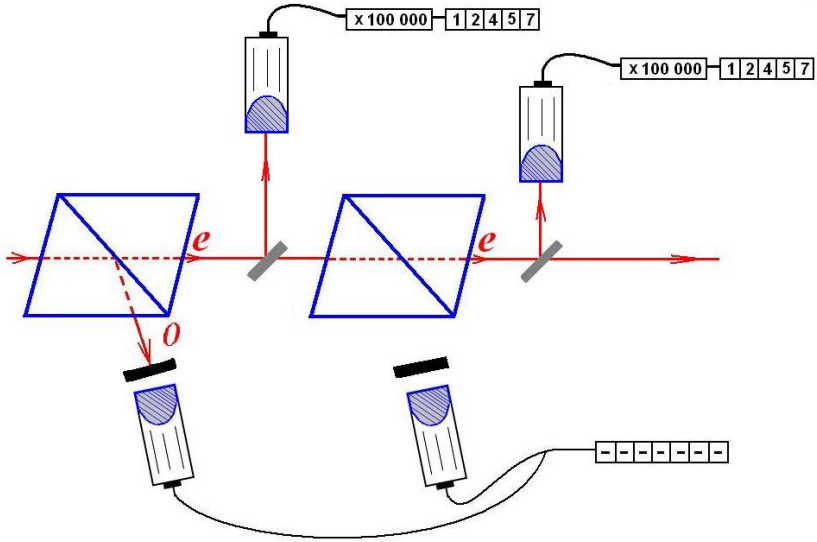


Рис. 10: Исправленная версия макроприбора для более строгой реализации формулы (5)

микросистемы: сразу же, когда свет проходит через призму Николя и попадает на заглушки, или только после того как сработает один из ФЭУ? В первом случае ФЭУ — это необязательный элемент макроприбора, необходимый только для того, чтобы в удобной форме передавать информацию об уже произошедшем измерении от макроприбора к наблюдателю. Во втором — неотъемлемая часть макроприбора. Соответственно, для первого случая можно ограничиться простым макроприбором, который изображен на рис. 5. Во втором случае следует использовать более громоздкую схему, показанную на рис. 9.

Теперь рассмотрим конфигурацию призм Николя, представленную на рис. 11. Из этого рисунка и определения символа нулевого измерения сразу получаем, что

$$\hat{\mathcal{P}}_o \otimes \hat{\mathcal{P}}_e = \hat{0}. \tag{6}$$

Задача. Проделайте всю необходимую цепочку логических рассуждений, которая приведет от рис. 11 к формуле (6).

Необходимо условиться о порядке следования сомножителей при перемножении символов измерения. Пусть всегда в произведении двух символов измерения правее стоит тот, который соответствует более раннему измерению. Например, на рис. 11 раньше происходит измерение, соответствующее символу $\hat{\mathcal{P}}_e$. Поэтому в выражении (6) этот символ стоит правее символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_o$. В порядке перемножения символов измерения легко можно усмотреть аналогию с определением операции умножения двух линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\left(\hat{A}\,\hat{B}\right)\,|\,\psi\,\rangle = \hat{A}\left(\hat{B}\,|\,\psi\,\rangle\right).$$

Как станет ясно ниже, эта аналогия совсем не случайна.

То, что измерение при помощи двух призм на рис. 11 можно разделить на два последовательных измерения каждой из призм Николя по отдельности, становится очевидным, если поставить на пути необыкновенного луча между двумя призмами полупрозрачное зеркало и изменить рис. 11 в духе рис. 10. Читателям предлагается сделать это самостоятельно.

Задача. Какая конфигурация призм Николя и заглушек доказывает, что произведение $\hat{\mathcal{P}}_e \otimes \hat{\mathcal{P}}_o = \hat{0}$?

В качестве обобщения частных примеров (5) и (6) можно предложить следующее общее правило, которому должно подчиняться произведение любых двух символов измерения, соответствующих значениям a_i и a_j спектра наблюдаемой A:

$$\hat{\mathcal{P}}_{a_i} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j} = \begin{cases} \hat{\mathcal{P}}_{a_i}, & \text{если} \quad a_i \equiv a_j; \\ \hat{0}, & \text{если} \quad a_i \neq a_j. \end{cases} \tag{7}$$

Если символ $\hat{\mathcal{P}}_a$ относится к наблюдаемой A, а символ $\hat{\mathcal{P}}_b$ — к наблюдаемой $B \neq A$, то для произведения $\hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{\mathcal{P}}_b$ не существует простого правила, аналогичного правилу (7). Результат произведения $\hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{\mathcal{P}}_b$ существенно зависит

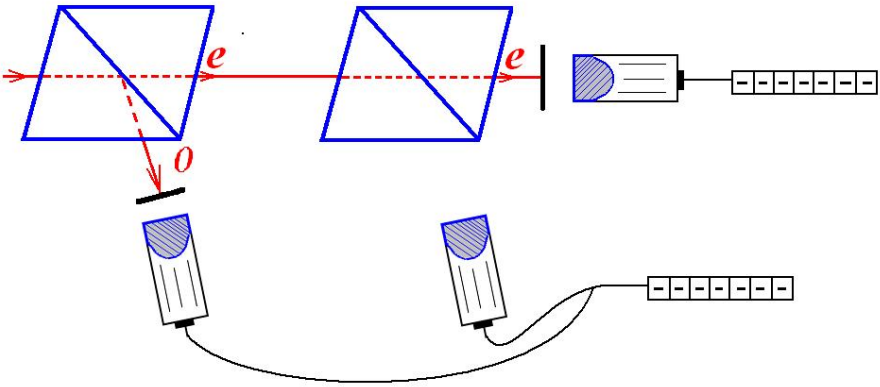


Рис. 11: Экспериментальная реализация формулы (6) для произведения символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$ и $\hat{\mathcal{P}}_o$

от того, можно ли создать макроприбор, который одновременно способен измерять наблюдаемые A и B, или для измерения спектров наблюдаемых A и B требуется *два принципиально различных* макроскопических прибора.

Задача. Сформулируйте аналог правила (7), если наблюдаемые A и B могут быть одновременно измерены при помощи одного макроприбора.

3.3. Сложение символов измерения

Пусть существует макроприбор, который может *одновременно* измерить сразу два значения a_i и a_j из спектра наблюдаемой A. Тогда действие этого макроприбора должно быть эквивалентно действию двух макроприборов, один из которых измеряет значение a_i, а другой — значение a_j. Естественно предположить, что символ измерения $\hat{\mathcal{P}}$ макроприбора, который может измерять два значения из спектра, должен быть равен **сумме символов измерения**

значений a_i и a_j по отдельности, что можно записать как

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}_{a_i} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j}. \tag{8}$$

В выражении (8) мы использовали символ «$\oplus$», чтобы подчеркнуть, что сложение символов измерения может отличаться от всех известных законов сложения, например законов сложения комплексных чисел.

Если сложить символы измерений, отвечающие всем значениям спектра наблюдаемой A, то это будет означать одновременное измерение полного спектра наблюдаемой A при помощи одного макроприбора. Такому действию, по определению, соответствует символ единичного измерения, то есть

$$\hat{1} = \hat{\mathcal{P}}_{a_1} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_2} \oplus \ldots \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \ldots \tag{9}$$

Частный случай формулы (9) реализуется, когда для линейно поляризованного пучка света, падающего на призму Николя, выполняется равенство

$$\hat{1} = \hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_o.$$

Слева стоит символ единичного измерения, которому сопоставлен макроприбор рис. 6. Справа — сумма двух символов измерения, каждому из которых сопоставляется макроприбор, аналогичный макроприбору для измерения интенсивности необыкновенного луча рис. 5 или 9. В качестве упражнения читателям предлагается самостоятельно нарисовать реализацию правой части равенства в терминах макроприборов.

Пользуясь правилами (7) и (9), можно установить, что:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{0} = \hat{0} \otimes \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{0}; \\ &\hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{1} = \hat{1} \otimes \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_a; \\ &\hat{0} \otimes \hat{0} = \hat{0}; \quad \hat{1} \otimes \hat{1} = \hat{1} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{и} \qquad \hat{\mathcal{P}}_a \oplus \hat{0} = \hat{0} \oplus \hat{\mathcal{P}}_a = \hat{\mathcal{P}}_a; \tag{11}$$
$$\hat{0} \oplus \hat{1} = \hat{1} \oplus \hat{0} = \hat{1}; \quad \hat{0} \oplus \hat{0} = \hat{0}.$$

Например, последовательно применяя определение (9) и два раза определение (7), получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \otimes \hat{1} &= \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \otimes \left(\hat{\mathcal{P}}_{a_1} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_2} \oplus \ldots \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \ldots\right) = \\ &= \hat{\mathcal{P}}_{a_j} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j} = \hat{\mathcal{P}}_{a_j}, \end{aligned} \tag{12}$$

которая доказывает второе тождество в системе (10).

В преобразованиях цепочки (12) впервые используются скобки. Они служат для выделения определенной совокупности макроприборов. Поскольку каждый макроприбор работает независимо от других макроприборов, то по отношению к операциям «$\otimes$» и «$\oplus$» скобки можно раскрывать точно также, как при обычных операциях умножения и сложения.

Задача. Проверьте справедливость остальных соотношений в (10) и (11).

Задача. Придумайте «мысленные эксперименты» с призмой Николя, заглушками и ФЭУ, которые бы иллюстрировали формулы (10) и (11).

При описании сложения символов измерения осталось решить последний вопрос: чему равна сумма $\hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j}$? Для этого вернемся к рис. 5, который соответствует макроприбору с символом измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Тогда два символа измерения соответствуют двукратному повторению измерения интенсивности необыкновенного луча и последующему сложению результатов измерения, как это показано на рис. 12. Поскольку результат двукратного измерения равен $2I_e$, логично предположить, что $\hat{\mathcal{P}}_e \oplus \hat{\mathcal{P}}_e = 2 \otimes \hat{\mathcal{P}}_e$. Обобщение данного результата на любые *целые* числа не представляет труда:

$$\underbrace{\hat{\mathcal{P}}_{a_j} \oplus \ldots \oplus \hat{\mathcal{P}}_{a_j}}_{n\,\text{раз}} = n \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}. \tag{13}$$

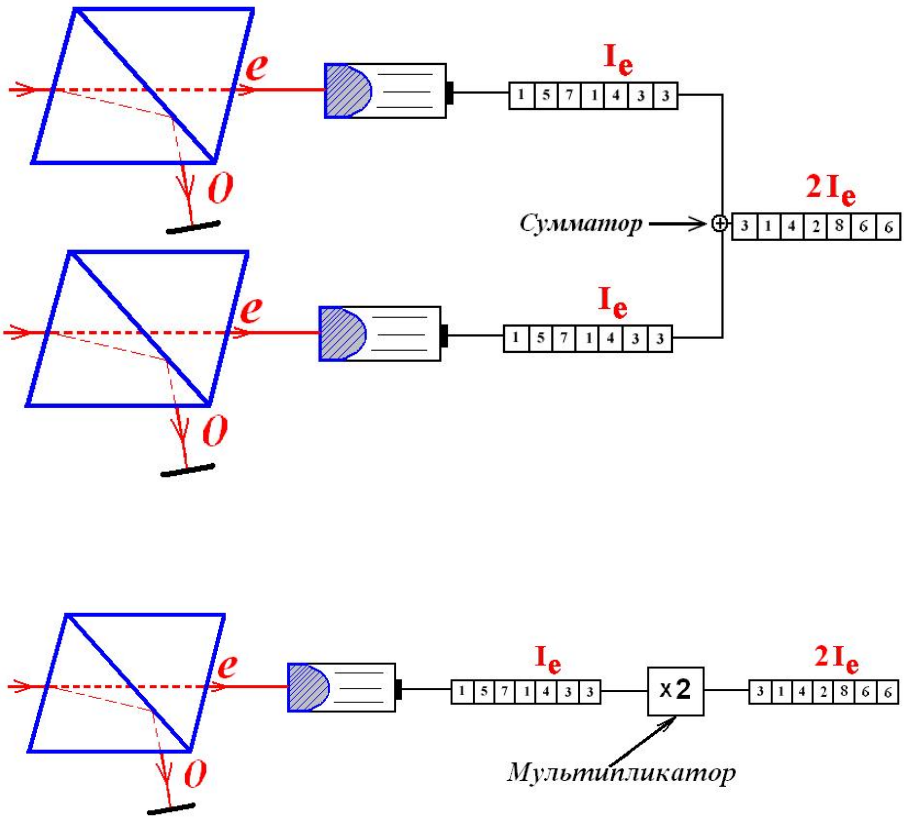


Рис. 12: «Экспериментальная» интерпретация сложения двух символов измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Верхний рисунок соответствует двукратному повторению измерения интенсивности необыкновенного луча, которая соответствует сложению символов измерения. Нижний рисунок — умножению сигнала ФЭУ на два. Легко видеть, что обе экспериментальные конфигурации приводят к одному и тому же результату

Очевидно, что символ измерения можно умножать не только на целые, но также на положительные рациональные и иррациональные числа. Умножение же на комплексные числа смысла не имеет, поскольку результаты измерения любых физических величин, например интенсивности I_e на рис. 12, выражаются действительными, а не комплексными числами. Смысл умножения на отрицательные числа обсуждается в параграфе 3.4.

Задача. Чему равна сумма $\hat{0} \oplus \hat{0}$?

Задача. Докажите, что для любых двух *действительных* чисел n и m выполняются следующие соотношения:

$$(n \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) \oplus (m \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) = (n + m) \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j};$$
$$(n \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) \otimes (m \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j}) = (n \times m) \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_j},$$

где «$+$» и «$\times$» — обычные операции сложения и умножения действительных чисел.

3.4. Коммутаторы и антикоммутаторы символов измерения

Можно ввести понятия **коммутатора** и **антикоммутатора для символов измерения**. Начнем с антикоммутатора. Будем обозначать его как $\{\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b\}$. Тогда

$$\{\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b\} = \hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{\mathcal{P}}_b \oplus \hat{\mathcal{P}}_b \otimes \hat{\mathcal{P}}_a. \tag{14}$$

Это определение ничем не отличается от определения антикоммутатора для операторов. С коммутатором сложнее, поскольку физический смысл имеет только операция «$\oplus$» сложения двух символов измерения. Поэтому будем говорить, что $[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b] = \hat{\mathcal{P}}$, если

$$\hat{\mathcal{P}}_a \otimes \hat{\mathcal{P}}_b = \hat{\mathcal{P}}_b \otimes \hat{\mathcal{P}}_a \oplus \hat{\mathcal{P}}. \tag{15}$$

В случае когда символы измерения $\hat{\mathcal{P}}_a$ и $\hat{\mathcal{P}}_b$ относятся к измерению различных значений спектра одной наблюдаемой A (то есть когда $a \equiv a_i$ и $b \equiv a_j$), определения (14) и (15) сводятся к весьма тривиальным ситуациям.

Задача. Проверьте, что

$$\{\hat{\mathcal{P}}_{a_i}, \hat{\mathcal{P}}_{a_j}\} = \begin{cases} 2 \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a_i}, & \text{если} \quad a_i \equiv a_j; \\ \hat{0}, & \text{если} \quad a_i \neq a_j. \end{cases}$$

Задача. Докажите, что если в определении (15) $a \equiv a_i$ и $b \equiv a_j$, то всегда $\hat{\mathcal{P}} = \hat{0}$. Как данный результат можно интерпретировать в терминах призм Николя, заглушек, ФЭУ и поляризаторов?

Если символы измерения $\hat{\mathcal{P}}_a$ и $\hat{\mathcal{P}}_b$ относятся к различным наблюдаемым A и B, то их коммутатор равен нулю тогда и только тогда, когда измерение спектра обеих наблюдаемых можно произвести при помощи одного и того же макроприбора. В подобной ситуации не важно, измеряется ли первой наблюдаемая A или наблюдаемая B. Во всех остальных ситуациях $[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\mathcal{P}}_b] \neq \hat{0}$. В математическом аппарате квантовой теории некоммутативность символов измерения двух наблюдаемых приводит к так называемому **соотношению неопределенностей Гейзенберга**.

3.5. Аналогия между символом измерения и проекционным оператором

Хорошо известно, что в гильбертовом пространстве можно ввести проекционный оператор $\hat{P}_{a_j} = |\, a_j \,\rangle \langle\, a_j \,|$, который проецирует любой вектор $|\, \psi \,\rangle$ на состояние $|\, a_j \,\rangle$[21]. В предыдущих параграфах мы изучили символ $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$, соответствующий измерению значения a_j наблюдаемой A. Сравнение математических свойств проекционного оператора с «физическими» свойствами символа

[21] Мы используем стандартную дираковскую нотацию для векторов в гильбертовом пространстве. Подробнее об этой нотации можно прочитать, например, в книгах [1] или [16].

измерения обнаруживает прямую аналогию между оператором $\hat{P}_{a_j}$ и символом $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$. Действительно:

1. в гильбертовом пространстве проекционный оператор действует по правилу $\hat{P}_{a_j} \mid \psi \rangle \sim \mid a_j \rangle$, в то время как символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}$ из всего спектра наблюдаемой A выделяет только одно значение a_j;

2. произведение двух проекционных операторов удовлетворяет интуитивно понятному условию $\hat{P}_{a_i}\hat{P}_{a_j} = \delta_{a_i a_j}\hat{P}_{a_j}$, которое по форме полностью аналогично правилу произведения двух символов измерения (7) значений a_i и a_j спектра наблюдаемой A;

3. если векторы $\mid a_j \rangle$ образуют базис в гильбертовом пространстве, то сумма $\sum \hat{P}_{a_j} = \hat{1}$, в то время как сумма символов измерения, отвечающих всем возможным значениям спектра наблюдаемой A, также равна единичному символу измерения (9).

Проведенное сравнение свойств проекционного оператора и символа измерения позволяет *предложить гипотезу*, что каждому значению a_j спектра наблюдаемой A соответствует минимум одно состояние микросистемы. Математическая природа этого состояния, как и математическая природа символа измерения, пока остаются неясными. Если формально сопоставить такому состоянию символ $\mid a_j \rangle$, то символ измерения можно записать по аналогии с проекционным оператором в симметричной форме:

$$\hat{\mathcal{P}}_{a_j} = \mid a_j \rangle \langle a_j \mid . \tag{16}$$

Еще раз подчеркнем, что запись (16) не более чем гипотеза до тех пор, пока мы не выясним математическую природу символов $\mid a_j \rangle$ [22].

[22] Проницательные читатели уже догадались, что в конце концов символы $\mid a_j \rangle$ будут отождествлены с векторами в гильбертовом пространстве. Однако для подобного отождествления, которое будет сделано в разделе 5, необходимо более детально исследовать свойства символов $\mid a_j \rangle$ с точки зрения измерения состояния микрочастицы макроскопическим прибором. Тем

Из (7) и (16) следует, что

$$|\,a_i\,\rangle\,\langle\,a_i\,|\,\otimes\,|\,a_j\,\rangle\,\langle\,a_j\,|\;=\;\begin{cases}|\,a_i\,\rangle\,\langle\,a_i\,|\,, & \text{если}\quad a_i\,\equiv\,a_j;\\ \hat{0}, & \text{если}\quad a_i\,\neq\,a_j,\end{cases}$$

или иначе

$$\langle\,a_i\,|\,\otimes\,|\,a_j\,\rangle\;=\;\begin{cases}\tilde{1}, & \text{если}\quad a_i\,\equiv\,a_j;\\ \tilde{0}, & \text{если}\quad a_i\,\neq\,a_j.\end{cases}\tag{17}$$

Выражение (17) содержит новые символы $\tilde{1}$ и $\tilde{0}$, которые обладают свойствами

$$|\,a_i\,\rangle\;\tilde{1}\;\langle\,a_i\,|\;=\;|\,a_i\,\rangle\,\langle\,a_i\,|\;=\;\hat{\mathcal{P}}_{a_i};$$
$$|\,a_i\,\rangle\;\tilde{0}\;\langle\,a_j\,|\;=\;\hat{0}.$$

Обсуждение произведений вида $\langle\,a\,|\,\otimes\,|\,b\,\rangle$, где a принадлежит спектру наблюдаемой A, а b — спектру наблюдаемой $B\,\neq\,A$, мы отложим до следующего раздела. Окончательно смысл подобных произведений станет ясен только после изучения теории представлений, которую мы планируем изложить в одном из следующих учебных пособий.

Задача. Проверьте, что конструкция (17) не противоречит аксиомам скалярного произведения.

В связи с последней задачей необходимо сделать две ремарки. Во-первых, напомним читателям аксиомы скалярного произведения в линейных (не обязательно гильбертовых!) пространствах:

$$\langle\,\varphi\,|\;\psi\,\rangle^*\;=\;\langle\,\psi\,|\;\varphi\,\rangle\,,$$
$$\langle\,\varphi\,|\;\lambda\times\psi\,\rangle\;=\;\lambda\,\langle\,\varphi\,|\;\psi\,\rangle\,,$$

не менее мы решили не множить количество обозначений, поэтому, несколько забежав вперед, обозначили состояние микросистемы точно так же, как и векторы в гильбертовом пространстве. Хочется еще раз подчеркнуть, что вплоть до раздела 5 мы не будем отождествлять состояния микросистемы и векторы в гильбертовом пространстве.

$$\langle\, \varphi \,|\; \psi + \chi \,\rangle = \langle\, \varphi \,|\; \psi \,\rangle + \langle\, \varphi \,|\; \chi \,\rangle\,,$$

$$\langle\, \psi \,|\; \psi \,\rangle \geq 0 \text{ (равенство достигается тогда и только тогда, когда } |\,\psi\,\rangle = |\,0\,\rangle\text{)},$$

где символ «$\times$» обозначает операцию умножения произвольного комплексного числа λ на вектор $|\,\psi\,\rangle$.

Во-вторых, уточним, что словосочетание «не противоречит» еще не означает, что исследуемая конструкция удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Например, поскольку неясно, что в конструкции (17) играет роль комплексного сопряжения, первая аксиома скалярного произведения для $\langle\, a_i \,|\, \otimes \,|\, a_j \,\rangle$ просто не определена.

3.6. Обобщение символа измерения

Выражение (16) имеет явно симметричный вид. Однако логика измерений и правило умножения (17) позволяют ввести **обобщенный**, или **несимметричный**, символ измерения

$$\hat{\mathcal{P}}_{a\,b} = |\,a\,\rangle\,\langle\, b\,|\,, \tag{18}$$

где значение a может принадлежать спектру наблюдаемой A, а значение b — спектру наблюдаемой B, вообще говоря, отличной от наблюдаемой A. Очевидно, что $\hat{\mathcal{P}}_{a\,a} \equiv \hat{\mathcal{P}}_a$. Тривиальным примером несимметричного символа измерения может служить символ измерения ФЭУ в системе на рис. 4. Наблюдаемая A в этом случае совпадает с интенсивностью, а наблюдаемая B — с силой электрического тока, которая может быть зарегистрирована амперметром.

Задача. Показать, что символ измерения ФЭУ можно записать в виде $|\,J_i\,\rangle\,\langle\, i\,|$, где $i = \{e, o\}$, а J_i — величина электрического тока, генерируемого ФЭУ.

Более продуктивно рассматривать несимметричные символы измерения вида $\hat{\mathcal{P}}_{a_i\,a_j} = |\,a_i\,\rangle\,\langle\, a_j\,|$, когда a_i и a_j принадлежат спектру одной и той же наблюдаемой A. Каков физический смысл обобщенного символа измерения в этом случае? Разберемся на примере символа измерения $\hat{\mathcal{P}}_{e\,o} = |\,o\,\rangle\,\langle\, e\,|$. Рассмот-

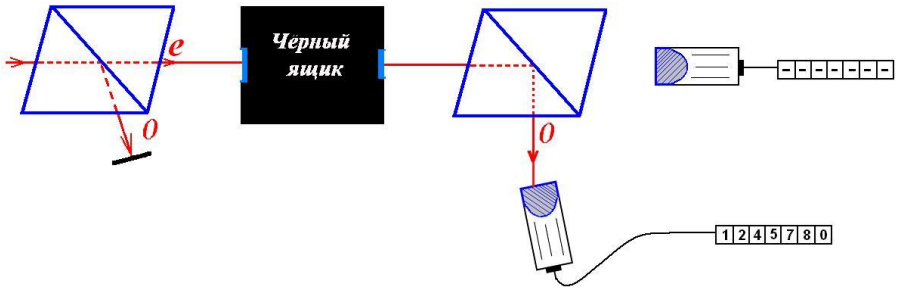


Рис. 13: В представленной «экспериментальной» ситуации «черному ящику» должен соответствовать обобщенный символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_{o\,e} = |\,o\,\rangle\langle\,e\,|$

рим две призмы Николя, разделенные некоторым «черным ящиком», как это показано на рис. 13. Пусть первая призма Николя выделяет только необыкновенный луч e. Тогда ей соответствует символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_e$. Далее необыкновенный луч попадает в «черный ящик». Поляризация вышедшего из «черного ящика» луча измеряется с помощью второй призмы Николя, идентичной первой по конструкции и ориентации в пространстве. При этом оказывается, что вторая призма Николя регистрирует только обыкновенный луч o. Тогда второй призме Николя необходимо сопоставить символ измерения $\hat{\mathcal{P}}_o$. Символ измерения всего измерительного прибора на рис. 13, который мы обозначим через $\hat{\mathcal{P}}_{tot}$, можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}_{tot} = \hat{\mathcal{P}}_o \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a\,b} \otimes \hat{\mathcal{P}}_e &= |\,o\,\rangle\langle\,o\,| \otimes |\,a\,\rangle\langle\,b\,| \otimes |\,e\,\rangle\langle\,e\,| = \\ &= |\,o\,\rangle \Big(\langle\,o\,| \otimes |\,a\,\rangle\Big)\Big(\langle\,b\,| \otimes |\,e\,\rangle\Big)\langle\,e\,|,\end{aligned}$$

где $\hat{\mathcal{P}}_{a\,b} = |\,a\,\rangle\langle\,b\,|$ — символ измерения «черного ящика». Поскольку $\hat{\mathcal{P}}_{tot} \neq \hat{0}$ (один из ФЭУ на рис. 13 выдает ненулевой сигнал), то $\langle\,o\,| \otimes |\,a\,\rangle \neq \tilde{0}$ и $\langle\,b\,| \otimes |\,e\,\rangle \neq \tilde{0}$. Принимая во внимание условие (17), мы видим, что наибо-

лее естественным образом неравенства $\langle\, o\,| \otimes |\, a\,\rangle \neq \tilde{0}$ и $\langle\, b\,| \otimes |\, e\,\rangle \neq \tilde{0}$ можно удовлетворить, если $a = o$ и $b = e$, то есть символ измерения «черного ящика» должен быть равен $\hat{\mathcal{P}}_{o\,e} = |\, o\,\rangle\langle\, e\,|$. При этом в «черном ящике» может находиться полуволновая пластинка, которая поворачивает на 90° поляризацию светового пучка, или какой-либо более сложный оптический прибор.

Задача. Реализуйте символы измерения $\hat{\mathcal{P}}_{o\,e}$ и $\hat{\mathcal{P}}_{e\,o}$ только при помощи поляризаторов.

Задача. Как построить символ измерения поляризатора $\hat{\mathcal{P}}_{\alpha}$ только при помощи призм Николя?

Задача. Почему символы измерения Швингера не имеет смысла использовать для описания процедуры измерения макроскопических объектов?

Задача. Используя условие (17) и определение несимметричного символа измерения (18) докажите, что:

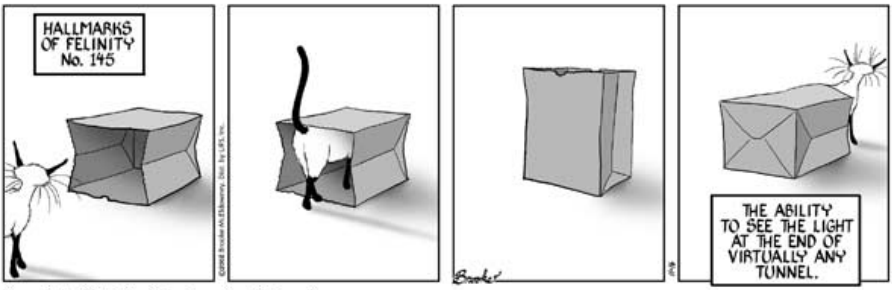
$$\hat{\mathcal{P}}_{a\,b_i} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{b_j\,c} = \begin{cases} \hat{\mathcal{P}}_{a\,c}\,, & \text{если} \quad b_i \equiv b_j; \\ \hat{0}, & \text{если} \quad b_i \neq b_j. \end{cases} \tag{19}$$

Для обобщенных символов измерения можно ввести понятие антикоммутатора и коммутатора по аналогии с формулами (14) и (15). В рассматриваемом случае эти понятия оказываются достаточно содержательными, поскольку для несимметричных символов измерения, вообще говоря,

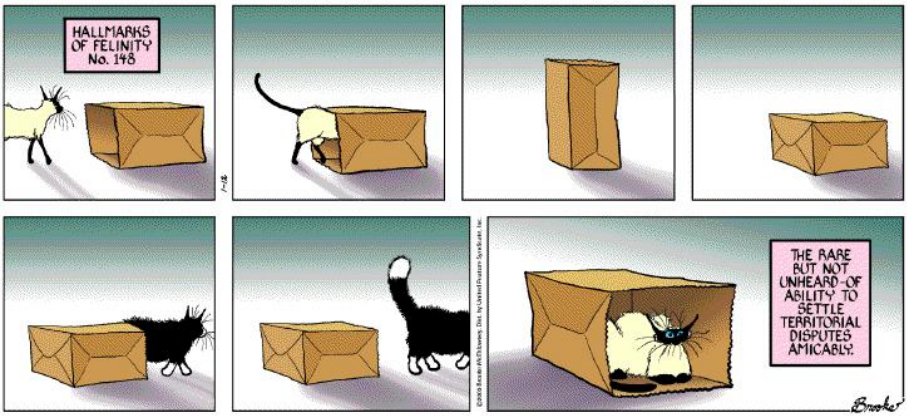
$$\hat{\mathcal{P}}_{a\,b} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{c\,d} \neq \hat{\mathcal{P}}_{c\,d} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a\,b}. \tag{20}$$

Для иллюстрации утверждения (20) положим $a = d$ и $b = c$. Тогда легко проверить, что $\hat{\mathcal{P}}_{a\,b} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{b\,a} = \hat{\mathcal{P}}_{a}$, но $\hat{\mathcal{P}}_{b\,a} \otimes \hat{\mathcal{P}}_{a\,b} = \hat{\mathcal{P}}_{b}$.

Закончим этот параграф шуточной интерпретацией симметричного и несимметричного символов измерения Швингера в классических терминах котов и коробок рис. 14, которая дает наглядное представление для столь абстрактных величин, коими являются символы измерения.



Copyright © United Feature Syndicate, Inc.



Copyright © 2003 United Feature Syndicate, Inc.

Рис. 14: Интерпретация символов измерения Швингера в макроскопических терминах котов и коробок. Верхний рисунок соответствует симметричному символу измерения, нижний — обобщенному. Рисунки взяты с сайта http://www.oocities.org/tawley/felinity.html

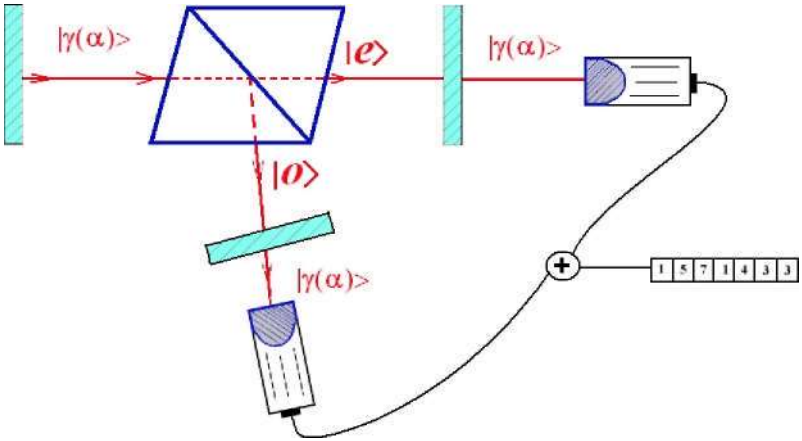


Рис. 15: «Мысленный эксперимент», объясняющий происхождение принципа суперпозиции в форме (21)