

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

В. И. Котов, А. Б. Кузнецов, Н. Б. Рубин

### СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	197
§ 1. Некоторые закономерности движения заряженных частиц в магнитном поле . . . . .	200
§ 2. Автофазировка . . . . .	206
§ 3. Общее рассмотрение движения частиц в циклических резонансных ускорителях . . . . .	215
§ 4. Некоторые особенности работы отдельных типов циклических резонансных ускорителей . . . . .	226
А. Синхротрон . . . . .	226
Б. Фазотрон . . . . .	235
В. Синхрофазотрон . . . . .	242
Г. Микротрон . . . . .	248
§ 5. Линейные ускорители . . . . .	250
§ 6. Сильнофокусирующие ускорители . . . . .	253

### ВВЕДЕНИЕ

Современные достижения в области физики атомного ядра и элементарных частиц в значительной степени связаны с успешным развитием ускорителей заряженных частиц.

Первым шагом в изучении структуры атомных ядер явились опыты знаменитого английского физика Резерфорда, которому в 1919 г. впервые удалось добиться превращения одного элемента в другой. При бомбардировке атомов азота  $\alpha$ -частицами, образующимися при радиоактивном распаде радия, Резерфордом были получены атомы кислорода. Эти опыты свидетельствовали о том, что на атомное ядро можно воздействовать. Кроме того, их анализ показал, что для эффективного воздействия на ядро необходимо иметь интенсивные пучки частиц большой энергии. Естественные радиоактивные препараты, конечно, не могли удовлетворить этим требованиям. Поэтому возникла необходимость создания установок, позволяющих сообщить интенсивным пучкам заряженных частиц большие энергии. Эти установки получили название ускорителей.

Сразу же после опытов Резерфорда ускорители широко стали применяться в физических лабораториях. Вначале появились установки, основанные на прямом методе ускорения, типа ускорителей Кокрофта—Уолтона и Ван-де-Граафа, а затем так называемые резонансные ускорители—линейные и циклотроны. Несмотря на то, что эти установки вследствие технических, а циклотроны и принципиальных трудностей могли давать заряженные частицы только сравнительно небольших энергий (несколько десятков  $Mэв$ ), использование их в исследовании ядер привело к значительным успехам. Это и понятно, так как энергии связи в ядре сравнительно невелики и изменяются от 1  $Mэв$  для легких элементов до 10  $Mэв$  для тяжелых. В результате исследований было открыто и изучено

большинство ядерных реакций с протонами, дейтонами и  $\alpha$ -частицами. Более половины искусственных радиоактивных элементов были впервые получены с помощью ускорителей. На ускорителях также был открыт ряд трансурановых элементов, в том числе и недавно полученный 102-й элемент таблицы Менделеева. Эти достижения в огромной степени расширили круг наших знаний о строении ядер и их свойствах, но все-таки не дали достаточно четких представлений о природе ядерных сил.

Толчком к дальнейшему изучению ядерных сил послужила зародившаяся при изучении космических лучей физика элементарных частиц. В 1947 г. в космических лучах был открыт ядерно-активный заряженный  $\pi$ -мезон, который согласно гипотезе Юкава ответственен за ядерные силы. Это открытие, а также ряд других показали, что дальнейший прогресс в изучении природы ядерных сил тесно связан с исследованием взаимодействия  $\pi$ -мезонов и других нестабильных элементарных частиц с нуклонами и ядрами. Однако эксперименты с космическими лучами не могут дать исчерпывающих сведений о природе ядерных сил. Для создания же нестабильных элементарных частиц и антинуклонов в лабораторных условиях необходимы гораздо большие энергии бомбардирующих частиц, чем для изучения ядерных реакций. Так, например, для образования  $\pi$ -мезонов необходимы энергии протонов не менее 300  $Mэв$ , а для рождения пары протон—антипротон на свободных нуклонах уже не менее 5,6  $Bэв$ .

Получение заряженных частиц таких энергий стало возможным только благодаря использованию в резонансных ускорителях открытого в 1944 г. В. И. Бекслером принципа автофазировки. Развитие ускорителей, в основу которых был положен этот принцип, позволило широким фронтом проводить исследования в области ядерных взаимодействий и элементарных частиц. В результате этих исследований были открыты нейтральный  $\pi$ -мезон, антипротон и антинейтрон и в значительной степени изучены свойства  $\pi$ -мезонов. В изучение  $\pi$ -мезонов существенный вклад сделан советскими физиками. Запуск в Советском Союзе синхротрона на 10  $Bэв$  открывает еще большие возможности. Такая энергия протонов позволяет осуществлять поиски и вести изучение более тяжелых элементарных частиц, чем протон, проводить эксперименты на лучках  $\pi$ -мезонов и  $K$ -мезонов в широком диапазоне энергий и т. п. В настоящее время на этом ускорителе получены первые результаты по взаимодействию протонов при энергии 10  $Bэв$  с ядрами фотоэмульсий. Один из характерных актов взаимодействия показан на рис. 1.

Из приведенных выше примеров видно, какое важное значение имеют ускорители для физики ядра и элементарных частиц. Их разработка и сооружение в настоящее время развились в самостоятельную область прикладной физики, а сами установки превратились из первых настольных приборов в сооружения, похожие на крупные заводы.

Как известно, все используемые сейчас методы ускорения заряженных частиц можно подразделить на три основные группы: прямой, индукционный и резонансный. В прямом методе ускорение осуществляется в вакуумной трубке, к концам которой приложена большая разность потенциалов. Единственный ускоритель, основанный на индукционном методе—бетатрон работает по принципу трансформатора, вторичной обмоткой которого является ускоряемый пучок электронов,двигающийся в специально подобранном нарастающем во времени магнитном поле. В настоящем обзоре мы не будем останавливаться на этих двух методах\*),

\*) Сведения относительно прямого и индукционного методов можно почерпнуть, например, в книге А. П. Гринберга «Методы ускорения заряженных частиц» (1950), а по бетатрону также в статье Керста «Бетатрон», УФН 24, 181 (1944).

а посвятим его последнему наиболее плодотворному методу ускорения—резонансному.

Отличительной чертой резонансного метода является то, что частицы постепенно накапливают энергию, многократно получая ее при прохождении промежутков, к которым приложено сравнительно небольшое переменное напряжение. В ускорителях, основанных на этом методе, различные параметры, определяющие закон движения частиц, подбираются так, чтобы частицы проходили ускоряющие промежутки приблизительно при одной и той же фазе ускоряющего поля, т. е. в резонанс с изменением напряжения на них.

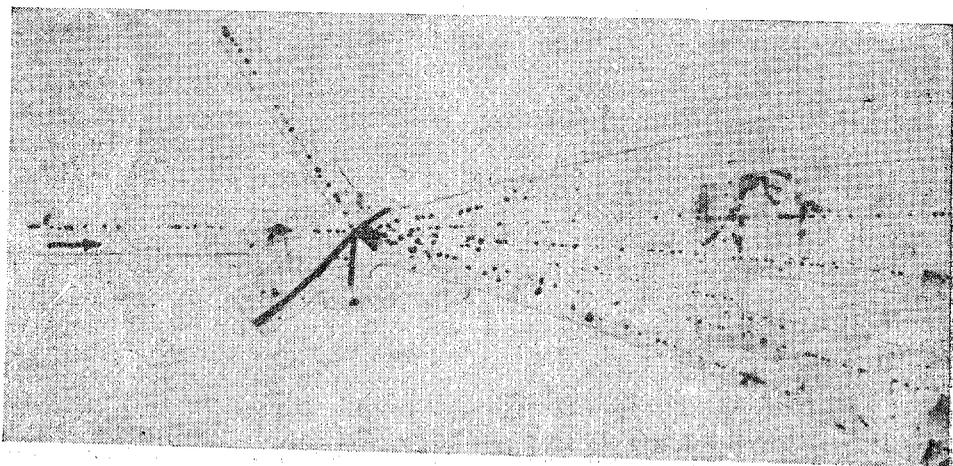


Рис. 1. Одна из первых фотографий, полученных на синхрофазотроне ОИЯИ, иллюстрирующая множественное рождение частиц при взаимодействии протона с энергией 10 *Бэв* с веществом.

Резонансный метод применяется как в современных линейных ускорителях, так и в циклических. В циклических ускорителях заряженные частицы двигаются в поперечном постоянном или переменном магнитном поле по почти замкнутым траекториям, близким к окружностям. На некоторых азимутах на пути частиц помещаются ускоряющие промежутки, а магнитное поле обеспечивает многократное прохождение через них. Первым циклическим резонансным ускорителем был циклотрон. Использование автофазировки привело к созданию обширного класса автофазирующих ускорителей различного типа.

В настоящее время с помощью наиболее мощных из них получены заряженные частицы с энергией в 6—10 *Бэв*; проектируются и строятся еще более мощные установки, рассчитанные на энергии до 50 *Бэв*. В разработке теории этих ускорителей, в их проектировании и сооружении советские ученые и инженеры занимают одно из ведущих мест.

При написании обзора авторы преследовали цель осветить принципиальные физические идеи, лежащие в основе современных резонансных ускорителей. В связи с этим центральное место в обзоре отведено автофазировке и различным сторонам ее проявления. Большое внимание уделяется также весьма важному вопросу, касающемуся устойчивости движения частиц в магнитных полях циклических ускорителей и действию различных возмущающих факторов на это движение.

### § 1. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим сначала простейший случай движения заряженной частицы в магнитном поле, однородном в пространстве и постоянном во времени.

Введем цилиндрическую систему координат и единичные векторы  $\mathbf{i}_r$ ,  $\mathbf{i}_\theta$ ,  $\mathbf{i}_z$  в направлении соответствующих координатных линий; предположим, что магнитное поле  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{i}_z$ .

Для записи в этой системе координат уравнений движения частиц воспользуемся вторым законом Ньютона

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{e}{c} \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \mathbf{B} \right]. \quad (1,1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор, направленный к частице из произвольного центра  $O$ ,  $m$  — релятивистская масса этой частицы,  $e$  — ее заряд (с соответствующим знаком),  $c$  — скорость света. Выражение, стоящее в (1,1) справа, представляет силу Лоренца, а левая часть — производную по времени от количества движения частицы.

Если считать, что центр  $O$  совпадает с началом цилиндрической системы координат ( $r = z = 0$ ), то, очевидно,  $\mathbf{x} = r\mathbf{i}_r + z\mathbf{i}_z$  при любом  $\theta$ .

Используя это выражение для  $\mathbf{x}$  и учитывая, что  $\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{i}_\theta$ ,  $\frac{d\mathbf{i}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\mathbf{i}_r$ ,  $\frac{d\mathbf{i}_z}{dt} = 0$  (точкой обозначается дифференцирование по времени), запишем левую часть уравнения (1,1) в виде

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \left[ \frac{d}{dt} (mr\dot{\theta}) - mr\dot{\theta}^2 \right] \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) \mathbf{i}_\theta + \frac{d}{dt} (m\dot{z}) \mathbf{i}_z. \quad (1,2)$$

Принимая также во внимание, что  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{i}_z$ , и предполагая, что единичные векторы, взятые в последовательности  $\mathbf{i}_r$ ,  $\mathbf{i}_\theta$ ,  $\mathbf{i}_z$ , образуют правую тройку, получим следующее выражение для правой части (1,1):

$$\frac{e}{c} \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \mathbf{B} \right] = \frac{e}{c} r\dot{\theta} B_z \mathbf{i}_r - \frac{e}{c} \dot{r} B_z \mathbf{i}_\theta. \quad (1,3)$$

Запишем теперь, исходя из (1,2) и (1,3), три уравнения движения частицы, присоединив к ним в качестве дополнительного четвертого уравнения выражение для энергии в цилиндрической системе координат \*):

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{r} \right) &= \frac{E}{c^2} r\dot{\theta}^2 + \frac{e}{c} r\dot{\theta} B_z, \\ \text{б) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} r^2 \dot{\theta} \right) &= -\frac{e}{c} r\dot{r} B_z, \\ \text{в) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{z} \right) &= 0, \\ \text{г) } E &= \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2]}}. \end{aligned} \right\} \quad (1,4)$$

\*) Заметим, что в общем случае в качестве основных переменных, характеризующих движение частицы, мы будем считать  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ ,  $E$ , где  $E$  — полная энергия частицы, а такие величины, как масса ( $m$ ), импульс ( $p$ ), скорость ( $v$ ), относительная скорость ( $\beta = \frac{v}{c}$ ), будем считать функциями от  $E$ :  $m = \frac{E}{c^2}$ ,  $p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2}$ , где  $E_0 = m_0 c^2$  — энергия покоя частицы,  $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$ ,  $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$ .

Уравнение (1,4а) выражает тот факт, что производная по времени от радиальной проекции импульса частицы равна сумме двух сил: центробежной силы инерции (первый член справа) и радиальной компоненты силы Лоренца (второй член справа).

Уравнение (1,4б) показывает, что производная по времени от момента  $\theta$ -й компоненты количества движения частицы, взятого относительно оси  $z$ , равняется моменту  $\theta$ -й компоненты силы Лоренца, взятому относительно той же оси.

Из уравнения (1,4в) следует, что вертикальная проекция импульса частицы в однородном магнитном поле не меняется во времени (нет соответствующей компоненты силы Лоренца).

Умножая уравнения (1,4а), (1,4б) и (1,4в) соответственно на  $\frac{E}{c^2} \dot{r}$ ,  $\frac{E}{c^2} \dot{\theta}$  и  $\frac{E}{c^2} \dot{z}$ , складывая их и используя (1,4г), получим хорошо известный результат:  $\frac{dE}{dt} = 0$ , говорящий о том, что при движении частицы в постоянном во времени магнитном поле ее энергия остается неизменной. Из уравнений (1,4) следует, естественно, и другой известный результат, заключающийся в том, что если в некоторый начальный момент вектор скорости частицы находился в плоскости, перпендикулярной силовым линиям однородного магнитного поля (в нашем случае в плоскости  $z = \text{const}$ ), то траекторией движения частицы будет окружность. Полагая, что начало цилиндрической системы координат совпадает с центром этой окружности, и вектор скорости, имеющий только  $\theta$ -ю компоненту, направлен в сторону увеличения  $\theta$ , из уравнения (1,4г) и (1,4а) соответственно найдем

$$r\dot{\theta} = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = v = \text{const}, \quad (1,5)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{eB_z c}{E}. \quad (1,6)$$

Последнее соотношение определяет частоту обращения частицы по окружности. Сравнивая (1,5) и (1,6), получим выражение для радиуса этой окружности\*)

$$r = -\frac{E\beta}{eB_z}. \quad (1,7)$$

Отметим теперь обстоятельство, очень важное для дальнейшего. Для циклических ускорителей недостаточно, чтобы магнитное поле обеспечивало только круговое движение частиц; необходима также устойчивость этого движения. Дело в том, что в реальном циклическом ускорителе из-за несовершенства вакуумной техники, неоднородности магнитных свойств материала и т. п. всегда имеют место процессы, возмущающие рассмотренное движение. Так как частицы в этих установках совершают в процессе ускорения большое количество оборотов (от сотен в циклотроне и до миллионов в других типах ускорителей), то действие

\*) Знак минус в формулах (1,6) и (1,7) означает следующее: если частица с положительным зарядом движется по окружности в направлении возрастания  $\theta$  и, как выбрано у нас, последовательность единичных координатных векторов  $i_r, i_\theta, i_z$ —правая, то  $B_z < 0$ , т. е. силовые линии магнитного поля направлены против  $i_z$ . Если по той же окружности движется в том же направлении отрицательно заряженная частица, то  $B_z > 0$ .

возмущений может полностью нарушить движение частиц. Поэтому реальный ускоритель сможет работать лишь в том случае, если созданы условия для устойчивого движения частиц. Это означает, что при всяком малом отклонении истинного движения частиц от движения по идеальной расчетной траектории частицы не должны удалиться от этой траектории, а должны «стремиться» вернуться к ней. Найти и осуществить условия устойчивого движения—одна из важнейших задач теории и практики ускорителей.

В однородном поле отсутствуют силы, которые обеспечивали бы «вертикальную» устойчивость при движении частиц. Небольшое отклонение направления скорости частицы от плоскости  $z = \text{const}$  приведет к тому, что частица будет двигаться не по окружности, а по винтовой спирали, и ее осевое смещение будет линейно расти со временем (см. уравнение (1,4в)).

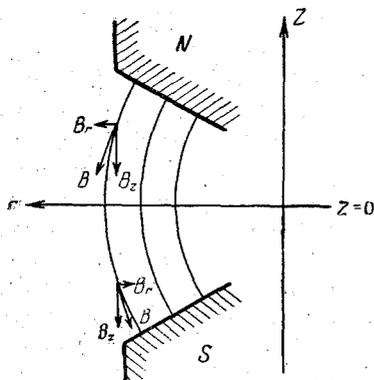


Рис. 2. Бочкообразное магнитное поле. Полюса магнита  $NS$  представляют тела вращения относительно оси  $z$ . Плоскость  $z=0$  является плоскостью симметрии. Силовые линии магнитного поля выгнуты наружу, т. е.  $B_z$  убывает с увеличением радиуса. Такую конфигурацию поля можно обеспечить за счет увеличения расстояния между полюсами с ростом радиуса.

Вопрос о горизонтальной или, как говорят, радиальной устойчивости в этом случае несколько сложнее. Изменение в горизонтальной плоскости направления скорости частицы, двигавшейся по окружности в этой плоскости, не нарушит, очевидно, характера движения, а приведет лишь к тому, что частица будет двигаться по окружности с другим центром. При малых углах отклонения центр сместится незначительно, и новое движение будет мало отличаться от прежнего. Исходя из этого, можно было бы сделать заключение, что радиальное движение частиц в однородном поле устойчиво. Однако, как нетрудно показать, даже очень небольшие локальные возмущения однородности поля могут привести к значительным горизонтальным смещениям круговой орбиты. Последнее означает, что в однородном магнитном поле отсутствует радиальная устойчивость движения частиц по отношению к малым возмущениям поля. Как мы увидим ниже, это можно трактовать как явление «резонансной» неустойчивости.

Оказывается, что движение, обладающее вертикальной и радиальной устойчивостью, возможно при определенных условиях в так называемом «бочкообразном» магнитном поле (см. рис. 2). Последнее, как видно из рисунка, характеризуется следующими свойствами:

- 1) Магнитное поле обладает цилиндрической симметрией относительно оси  $z$ .
- 2) Силовые линии поля пересекают плоскость  $z=0$  и симметричны относительно нее (как говорят, поле обладает плоскостью симметрии).
- 3) Вертикальная компонента поля  $B_z$  при  $z = \text{const}$  монотонно убывает с увеличением радиуса.

Отметим, что «бочкообразность», так же как и «однородность» поля возможны лишь в случае, если в рассматриваемой области отсутствуют токи:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0. \quad (1,8)$$

«Бочкообразное» поле имеет, очевидно, не одну компоненту, как одно-

родное поле, а две компоненты:  $B_z$  и  $B_r^*$ ), причем компонента  $B_r$  равна нулю в плоскости симметрии поля ( $z=0$ ) и направлена в разные стороны выше и ниже этой плоскости.  $B_r$  создает вертикальную компоненту силы Лоренца, возвращающую, как мы увидим, частицы в плоскость симметрии, т. е. обеспечивает вертикальную устойчивость движения в плоскости  $z=0$ .

Действительно, пусть, например, силовые линии магнитного поля направлены, как показано на рис. 2, вниз ( $B_z < 0$ ), и положительно заряженная частица, обращающаяся около оси  $z$ , находится в данный момент слева от этой оси, двигаясь в сторону читателя (при другом направлении движения частица не обращалась бы около оси  $z$ ). Тогда нетрудно видеть, что в любом случае, находится ли частица выше или ниже плоскости  $z=0$ , компонента поля  $B_r$  (большая нуля, если  $z > 0$ , и меньшая нуля, если  $z < 0$ ) обуславливает силу Лоренца, направленную к плоскости  $z=0$ , или, иными словами, обеспечивает «вертикальную фокусировку». К тому же результату мы придем и при рассмотрении движения отрицательно заряженной частицы, если направление ее вращения сохраним прежним, а направление магнитного поля переменим на обратное или, наоборот, не меняя направления магнитного поля, изменим направление вращения частицы. Подчеркнем, что если силовые линии на рис. 2 были бы выгнуты не наружу, как в случае «бочкообразного» поля, а внутрь, то сила Лоренца, обусловленная  $B_r$ , не приближала бы частицы к плоскости  $z=0$ , а наоборот, удаляла; в этом случае была бы вертикальная неустойчивость.

Остановимся теперь на движении частиц в плоскости  $z=0$ . Если в однородном поле любая окружность, лежащая в плоскости  $z=0$ , может быть орбитой частицы с соответствующей энергией, то теперь окружность может быть орбитой частицы лишь в случае, если центр этой окружности лежит на оси симметрии поля. Это объясняется тем, что только на таких окружностях вертикальная компонента поля постоянна, что, как нетрудно показать, является необходимым условием для осуществления кругового движения частицы с постоянной энергией. Радиус круговой орбиты (обозначим его через  $r_0$ ) для частицы с данной энергией  $E$  и частота обращения этой частицы ( $\omega_0$ ) будут, очевидно, определяться в соответствии с (1,6) и (1,7) следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } r_0 &= -\frac{E\beta}{eB_0}, \\ \text{б) } \omega_0 &= -\frac{ceB_0}{E}, \end{aligned} \right\} \quad (1,9)$$

где

$$B_0 = B_z(r, z) \Big|_{\substack{r=r_0 \\ z=0}}.$$

Покажем качественно, что в рассматриваемом нами «бочкообразном» поле движение по этим круговым орбитам будет обладать радиальной устойчивостью; если вертикальная компонента магнитного поля

\*) Компонента поля  $B_\theta = 0$ , как и в случае однородного поля, что является следствием цилиндрической симметрии поля и уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ . Следует, однако, сказать, что, вообще говоря, если в рассматриваемую область поля не включена точка  $r=0$ , т. е. если интерес представляет лишь кольцевая область, то из указанных свойств поля не следует, что  $B_\theta = 0$ . При этом необходимо еще потребовать, чтобы была равна нулю циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по контуру, охватывающему точку  $r=0$ , или, в частности, чтобы отсутствовал ток вдоль оси  $z$ . В дальнейшем мы будем полагать, что это требование выполнено.

в плоскости  $z=0$ , т. е.  $B = B_z(r, z)|_{z=0}$  спадает с увеличением радиуса не быстрее, чем  $1/r$ .

При движении частицы по окружности с радиусом  $r_0$  центробежная сила инерции равна и противоположна центростремительной силе — силе Лоренца, создаваемой вертикальной компонентой магнитного поля. Центробежная сила спадает с увеличением радиуса как  $1/r$ , и поэтому, если  $B$  спадает с увеличением радиуса слабее, чем  $1/r$ , то на радиусах, больших  $r_0$ , центростремительная сила больше центробежной и, следовательно, радиус орбиты будет уменьшаться. На радиусах, меньших  $r_0$ , наоборот, центробежная сила больше центростремительной, и радиус будет увеличиваться. Таким образом, движение по окружности с радиусом  $r_0$ , определяемым формулой (1,9а), будет действительно устойчивым, если  $B$  спадает с увеличением радиуса слабее, чем  $1/r$ .

Получим соответствующие уравнения, подтверждающие справедливость выводов, сделанных на основе качественных соображений. Наличие компоненты  $B_r$  в случае рассматриваемого здесь поля приведет к появлению в уравнениях (1,4б) и (1,4в) дополнительных членов, так что эти уравнения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} r^2 \dot{\theta} \right) = -\frac{e}{c} r \dot{r} B_z + \frac{e}{c} r \dot{z} B_r, \quad (1,10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{z} \right) = -\frac{e}{c} r \dot{\theta} B_r. \quad (1,11)$$

Положим, что

$$B = B_z(r, z)|_{z=0} = \frac{A}{r^n}, \quad (1,12)$$

где  $A$  и  $n$  — постоянные величины. Величину  $n$ , определяемую в соответствии с (1,12) формулой  $n = -\frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r}$ , называют обычно показателем спада магнитного поля. Случаю «бочкообразного» поля отвечает  $n > 0$ . Поле будет, очевидно, спадать слабее, чем  $1/r$ , если  $n < 1$ . Получив из уравнений движения (1,4а), (1,10), (1,11), (1,4г) тем же методом, что и в случае однородного поля, интеграл энергии  $E = \text{const}$ , положим  $r = r_0 + \rho$  и в дальнейшем будем пренебрегать всеми величинами более высокого порядка, чем  $\rho/r_0$ ,  $z/r_0$ ,  $\dot{\rho}/r_0\omega_0$ ,  $\dot{z}/r_0\omega_0$ . При этом согласно (1,12) будем, в частности, иметь:

$$B = B_0 \left( 1 - n \frac{\rho}{r_0} \right). \quad (1,13)$$

Для определения  $r$ -й компоненты магнитного поля воспользуемся уравнением  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  (см. (1,8)), из которого получим, что

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z}.$$

Разлагая затем  $B_r$  по степеням  $z/r_0$  около  $z=0$  и принимая во внимание последнее соотношение, уравнение (1,13) и тот факт, что

$$B_r(r, z)|_{z=0} = 0,$$

в линейном приближении найдем:

$$B_r = -n B_0 \frac{z}{r_0}. \quad (1,14)$$

Используя полученные линеаризованные выражения для компонент поля, интеграл энергии и уравнения движения (1,4а), (1,11), (1,4г)

в линейном приближении по указанным выше переменным, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d^2\rho}{dt^2} + \omega_0^2(1-n)\rho &= 0, \\ \text{б) } \frac{d\theta}{dt} &= \omega_0 \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right), \\ \text{в) } \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2nz &= 0, \\ \text{г) } E &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (1,15)$$

Уравнение (1,15в) показывает, что в случае «бочкообразного» поля действительно обеспечивается вертикальная фокусировка, так как это уравнение при  $n > 0$  описывает гармонические колебания.

Радиальная фокусировка при  $n > 0$ , как видно из уравнения (1,15а), также обеспечивается, но лишь в случае, если  $n < 1$ , т. е. если магнитное поле, как уже говорилось, уменьшается с радиусом не быстрее, чем  $1/r$ . Таким образом, при условии  $0 < n < 1$  движение частицы с энергией  $E$  по окружности радиуса  $r_0$ , определяемого формулой (1,9а), будет устойчивым, так как малые отклонения от движения по окружности существенно не нарушают этого движения, а приводят лишь к тому, что оно осуществляется в среднем, сопровождаясь малыми колебаниями. Это устойчивое движение по окружности называют обычно равновесным, а соответствующую окружность равновесной орбитой. Частоты колебаний около равновесной орбиты, определяющие, как говорят, жесткость фокусировки, согласно (1,15а) и (1,15в) равны:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-n}, \quad \omega_z = \omega_0 \sqrt{n}. \quad (1,16)$$

При выполнении условия  $0 < n < 1$  частоты радиальных и вертикальных колебаний частицы меньше частоты обращения  $\omega_0$ , т. е. полные колебания происходят за время, большее периода обращения частицы. Подчеркнем, что чем больше частоты вертикальных и радиальных колебаний, тем больше возвращающие фокусирующие силы, и, следовательно, тем меньше будут отклонения движения от равновесной орбиты. Эти отклонения характеризуются амплитудой колебаний, которая, согласно (1,15а) и (1,15в), выражается следующей формулой:

$$a_{r,z} = \sqrt{b_{r,z}^2 + \frac{r_0^2}{\alpha_{r,z}^2} \gamma_{r,z}^2}, \quad (1,17)$$

где  $b_{r,z}$  — соответственно радиальное и вертикальное отклонения начального положения частицы от равновесной орбиты;  $\gamma_{r,z}$  — соответствующие проекции угла между направлением начальной скорости частицы и касательной к равновесной орбите;  $\alpha_r = \sqrt{1-n}$ ,  $\alpha_z = \sqrt{n}$ .

Выражение (1,17) показывает, что, действительно, большим значениям частот колебаний, т. е. большим  $\alpha$ , соответствует, вообще говоря, меньшая амплитуда  $a$ . Таким образом, для улучшения фокусировки необходимо увеличивать частоты колебаний. Однако в случае рассматриваемого нами поля улучшение фокусировки в одном из направлений автоматически приводит к ухудшению ее в другом направлении. В самом деле, возрастающее по радиусу поле ( $n < 0$ ) обладает хорошими фокусирующими свойствами в радиальном направлении, но дефокусирует частицы в вертикальном; если же поле «сильно» (сильнее чем  $1/r$ ) спадает по радиусу, то при «хорошей» вертикальной фокусировке мы будем иметь радиальную дефокусировку.

Отметим, что при рассмотрении устойчивости движения частиц в «бочкообразном» поле мы не касались вопроса о том, как отразится на устойчивости наличие небольших, практически всегда имеющих отклонений магнитного поля от идеально «бочкообразного»; между тем, как мы уже упоминали, эти отклонения в случае однородного поля ( $n=0$ ) приводят к «резонансной» неустойчивости. На этом вопросе мы остановимся в дальнейшем, а сейчас скажем, что «резонансная» неустойчивость того типа, которая имеет место в случае однородного поля, здесь исключена.

Сделаем еще одно замечание. Уравнения радиальных и вертикальных колебаний иногда удобно записывать в такой форме, когда за независимую переменную принято не время  $t$ , а азимут  $\theta$ . Уравнения в этой форме, получаемые из (1,15а) и (1,15в) при использовании соотношения (1,15б), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \rho'' + (1-n)\rho &= 0, \\ \text{б) } z'' + nz &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1,18)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\theta$ . Исходя из этой формы уравнений, иногда пользуются понятием «безразмерных частот» радиальных и вертикальных колебаний, равных соответственно  $\sqrt{1-n}$  и  $\sqrt{n}$ . Безразмерная частота означает, очевидно, число колебаний (число длин волн), укладывающихся на одном обороте частицы. Безразмерные периоды радиальных и вертикальных колебаний выражаются соответственно формулами  $\frac{2\pi}{\sqrt{1-n}}$  и  $\frac{2\pi}{\sqrt{n}}$  и равны изменению азимута частицы в процессе обращения при совершении ею одного колебания.

Мы рассмотрели движение заряженных частиц в постоянном во времени магнитном поле при неизменной энергии и показали его устойчивость при  $0 < n < 1$ . Очевидно, что характер движения будет тем же и в случае, когда энергия частиц или магнитное поле медленно (по сравнению с периодом колебаний и, соответственно, периодом обращения частиц) меняются во времени. При этом устойчивое движение частиц будет происходить по траектории, радиус которой также медленно меняется (см. 1,9а). Эту, строго говоря, не замкнутую, но почти замкнутую траекторию называют мгновенной орбитой. «Частота обращения» (1,9б) частиц по мгновенной орбите тоже, конечно, непостоянна.

В дальнейшем мы покажем, что медленное изменение энергии и магнитного поля во времени может привести только к адиабатическому затуханию или раскачке вертикальных и радиальных колебаний частиц около их мгновенной орбиты.

Рассмотренные выше радиальные и вертикальные, а также азимутальные колебания (см. 1,15б) имеют место во всех ускорителях с магнитным полем. Вследствие того, что эти колебания не связаны с процессом ускорения, они называются обычно свободными; а в связи с тем, что они впервые были изучены<sup>1, 2</sup> в бетатроне, их называют иногда бетатронными.

## § 2. АВТОФАЗИРОВКА

На использовании рассмотренных свойств движения частиц в постоянном магнитном поле с цилиндрической симметрией был основан первый резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, дейтронов,  $\alpha$ -частиц)—циклотрон Лоуренса.

Согласно (1,9б) частота обращения частиц в таком поле практически постоянна в нерелятивистском случае, т. е. когда полная энергия

частиц  $E = W_k + E_0 \cong E_0$ , где  $W_k$  — кинетическая энергия, а  $E_0$  — энергия покоя; при этом чем больше энергия покоя частицы, тем при большей кинетической энергии ее можно считать еще «нерелятивистской». Это обстоятельство и используется в циклотроне, в котором к ускоряющим электродам прикладывается переменная синусоидальная разность потенциалов с постоянной частотой  $\omega$ , равной частоте обращения частиц  $\omega_0$ , так что при каждом прохождении частицами ускоряющего промежутка они получают одинаковую порцию энергии. Таким образом, в циклотроне движение частиц происходит как бы в резонанс с изменением электрического поля. Однако резонанс в циклотроне с ростом энергии частиц будет, очевидно, расстраиваться, так как при росте энергии все больше и больше будет проявляться зависимость частоты обращения частиц по мгновенной орбите от кинетической энергии. Это приведет в конечном счете к нарушению резонанса.

Уменьшение магнитного поля с увеличением радиуса по закону  $A/r^n$ , где  $0 < n < 1$ , еще более усугубляет положение, так как при таком законе спада поля увеличение энергии частицы сопровождается увеличением радиуса орбиты  $r_0$ . Следовательно, частота  $\omega_0$  с увеличением энергии будет уменьшаться из-за увеличения  $E$  в знаменателе формулы (1,9б) и уменьшения  $B_0$  в числителе. Правда, спадание магнитного поля в циклотроне делается обычно очень малым, особенно при малых радиусах и соответственно малых энергиях, когда вертикальная фокусировка обеспечивается электрическими силами при прохождении ускоряющего промежутка\*).

Поддержания «точного» резонанса в циклотроне можно, в принципе, добиться изменением во времени частоты ускоряющего напряжения или магнитного поля в такт с увеличением энергии частицы. Но такой резонанс возможен, очевидно, лишь для «одной избранной» частицы, да и то в идеальном эксперименте. Последнее соображение долгое время казалось убедительным подтверждением широко распространенного в свое время мнения о том, что резонансный метод не пригоден для получения частиц достаточно высоких энергий. Однако в 1944 г. советский ученый В. И. Векслер опроверг это ошибочное мнение. В. И. Векслер показал<sup>3, 4, 5</sup>, что в принципе резонансный метод позволяет ускорять частицы до теоретически беспредельных энергий и указал ряд путей практической реализации соответствующих режимов\*\*). При этом В. И. Векслер исходил из открытого им при анализе резонансного ускорения частиц явления, получившего название автофазировки.

Для того чтобы подойти к рассмотрению этого явления и, следовательно, к анализу возможности резонансного ускорения частиц до высоких энергий, остановимся более подробно на некоторых сторонах режима ускорения, подобного циклотронному, т. е. в случае постоянного во времени магнитного поля и постоянной частоты ускоряющего напряжения.

Отвлекаясь от свободных колебаний, т. е. предполагая движение частиц происходящим по мгновенным орбитам, рассмотрим частицу, частота обращения которой по мгновенной орбите  $\omega_0$  совпадает в некоторый момент с частотой ускоряющего электрического поля  $\omega$ , сосредоточенного в ускоряющем промежутке на азимуте  $\theta_1$  (для простоты мы пренебрегаем протяженностью промежутка и считаем, что за оборот частица встречает его только один раз). Пусть частица прошла ускоряющий промежуток

\*) Близость поля к однородному (поле на максимальном радиусе отличается обычно от поля в центре магнита на 0,10%—0,15%), при котором имеется резонансная неустойчивость по радиусу, не представляет в циклотроне очень большой опасности ввиду больших радиальных размеров камеры ускорителя.

\*\*\*) Такой же результат на год позже был независимо получен американским физиком Мак-Милланом<sup>6</sup>.

в момент времени, когда фаза электрического поля равнялась некоторому значению  $\varphi_i$ , соответствующему ускорению частицы (см. рис. 3). При этом она приобретет некоторую энергию, радиус ее мгновенной орбиты увеличится, а частота обращения частицы  $\omega_0$  уменьшится, т. е. соответственно увеличится период  $T_0$  обращения ее по орбите\*).

В силу этого при следующем прохождении ускоряющего промежутка частица запоздает по фазе, т. е. «фаза частицы» на рис. 3 несколько сместится вправо\*\*).

При дальнейших прохождениях фаза будет продолжать смещаться вправо и, наконец, «попадет» в область «замедляющей» полуволны напряжения. Очевидно, что при таких значениях фаз частица будет тормозиться, период ее обращения уменьшаться, но фаза будет продолжать смещаться вправо до тех пор, пока энергия и период обращения частицы не примут начальных «резонансных» значений. После этого фаза начнет перемещаться влево, так как энергия и период будут продолжать уменьшаться (ведь частица проходит ускоряющий промежуток в «замедляющей» полуволне). После «прохождения» фазой значения  $\pi/2$  энергия и период начнут увеличиваться, однако фаза будет продолжать смещаться влево до тех пор, пока не станет равной  $\varphi_i$ , где энергия и период обращения частицы опять будут равны «резонансным» значениям. Далее этот процесс колебания фазы повторится.

Подчеркнем, что, каковы бы ни были начальные фазы всех других частиц, они будут испытывать аналогичный колебательный процесс, если начальная энергия и, следовательно, радиус и частота совпадают с таковыми для рассмотренной нами частицы, или, короче, если  $\omega_0 = \omega$ . При сформулированных условиях имеет место «фазовая устойчивость» при любых начальных фазах, причем положением равновесия «фазовых колебаний» является фаза  $\pi/2$ , при которой частица не получает и не теряет энергию, так как при этом  $V = 0$  (см. рис. 3). Имеется, конечно, и другое положение равновесия — фаза  $\varphi = -\pi/2$ , но оно, как нетрудно показать, неустойчиво, так как малейшее отклонение фазы от этого значения приведет к возникновению больших колебаний около положения устойчивого равновесия\*\*\*). Колебания фазы, как мы видели, сопровождаются колебаниями энергии, радиуса орбиты и частоты обращения частицы, совершающимися около соответствующих равновесных (стабильных) значений  $E = E_s = \text{const}$ ,  $r_0 = r_s = \text{const}$ ,  $\omega_0 = \omega_s = \omega = \text{const}$ . Колебания всех этих величин объединяют обычно одним общим названием — «радиально-фазовые колебания».

Рассмотрим теперь более общий случай. Предположим, что в начальный ( $i$ -й) момент энергия, а следовательно, радиус орбиты и частота обращения частицы не являются равновесными, т. е., в частности,  $\omega_{0i} \neq \omega_s$ . Для определенности возьмем  $\omega_{0i} > \omega_s$  (соответственно  $E_i < E_s$ ,  $r_{0i} < r_s$ ,  $T_{0i} < T_s$ ) и будем считать, как и раньше, что фаза «первого прохождения» ускоряющего промежутка  $\varphi_i$  лежит в «ускоряющей» полуволне напряжения.

Получив некоторую энергию при прохождении ускоряющего промежутка, частица будет иметь больший период, чем вначале, однако, если

\*) Влияние на  $T_0$  увеличения длины орбиты, обусловленного возрастанием радиуса, оказывается здесь более существенным, чем влияние увеличения скорости частицы, поэтому период обращения при увеличении энергии увеличивается.

\*\*\*) Для краткости мы будем говорить «фаза частицы», имея в виду фазу ускоряющего напряжения в момент, когда частица проходит ускоряющий промежуток.

\*\*\*\*) Значения фазы  $\varphi + 2k\pi$ , где  $k$  — любое целое, положительное или отрицательное число, естественно подразумеваются, когда мы говорим о фазе  $\varphi$ , так что положением устойчивого равновесия будут, конечно, и фазы  $\pi/2 + 2k\pi$ .

прирост периода меньше, чем  $T_s - T_{0i}$ , то в следующий раз она пройдет ускоряющий промежуток в фазе, меньшей  $\varphi_i$ . Фаза частицы будет уменьшаться до тех пор, пока энергия ее не станет равной равновесной, т. е.  $E = E_s$ ,  $r_0 = r_s$ ,  $\omega_0 = \omega_s$ . Эту крайнюю левую фазу обозначим  $\varphi_1$ . Начиная с этого момента, процесс будет, очевидно, таким же, как в уже рассмотренном случае: фаза будет перемещаться вправо, «перейдет»  $\pi/2$ , затем, дойдя до некоторой фазы  $\varphi_2$  в области «замедляющей полуволны» напряжения, вернется в  $\varphi_1$  и т. д. Обратим внимание на то, что описанный здесь процесс возможен не при любой начальной расстройке частот  $\omega_{0i} - \omega_s$ . Может оказаться, что фаза частицы дойдет уже до  $-\pi/2$ , а

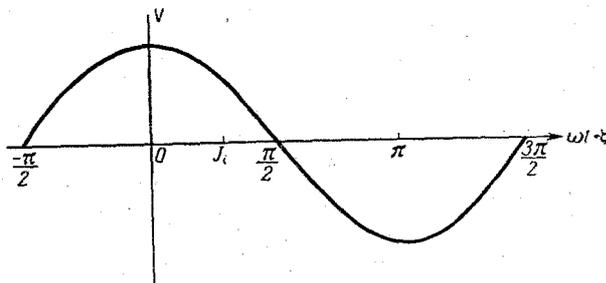


Рис. 3. Ускоряющее напряжение  $V$  как функция его фазы  $\omega t + \xi$ . Прирост энергии частицы при прохождении в некоторый момент ускоряющего напряжения определяется величиной  $eV_0 \cos \varphi_i$ , где  $\varphi_i$  — фаза ускоряющего напряжения в момент прохождения. Будем считать на рисунке ось  $V$  направленной вверх при  $e > 0$  и вниз при  $e < 0$ . Тогда область фаз  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  будет соответствовать ускорению частиц (ускоряющая «полуволна»), а область фаз  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$  — замедлению (замедляющая «полуволна»).

энергия, радиус и частота еще не сравниваются с равновесными значениями; в дальнейшем частица будет терять энергию, период опять начнет уменьшаться, и фаза на рис. 3 будет продолжать «ползти» влево — фаза уже не будет колебаться около постоянного значения. Очевидно, что чем ближе начальная фаза  $\varphi_i$  к  $\pi/2$ , тем большие расстройки допустимы с точки зрения осуществления колебаний фазы, поскольку остается больше возможности «добрать» энергию до равновесной: впереди «целая» «ускоряющая полуволна». Аналогичные процессы мы будем наблюдать и в том случае, если  $\omega_{0i} < \omega_s$ .

Возвращаясь снова к циклотрону, мы видим, что для получения наибольшей энергии ( $E_{\max}$ ) частиц в этой установке необходимо осуществить такие условия, чтобы частица максимальное число раз пересекла ускоряющий промежуток в области «ускоряющей полуволны», прежде чем ее фаза станет равной  $\pi/2$ . Это может быть достигнуто следующим образом: начальные фазы частиц выбираются близкими к  $\pi/2$  (в области ускоряющей полуволны), а частота электрического поля берется меньше, чем частота обращения инжектируемых частиц, причем разность  $\omega_0 - \omega$  выбирают такой, чтобы «левая» точка поворота  $\varphi_1$  была в районе  $-\pi/2$ . При этом частица будет все время получать энергию, пока фаза не совершит половину полного колебания от  $\pi/2$  до  $-\pi/2$  и от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . При всех других вариантах фаза значительно быстрее достигает  $\pi/2$  (при движении слева направо), и число пересечений ускоряющего промежутка будет меньше, а следовательно, будет меньше

и предельная энергия частиц. Впервые на это обстоятельство было указано советским физиком Хургиным<sup>7</sup>.

Исходя из описанного выше, можно получить следующее простое выражение для максимальной энергии частиц, достижимой с помощью циклотрона.

$$E_{\max} = 4 \sqrt{\frac{eV_0 E_0}{\pi}} \quad (2,1)$$

Практически достигаемое значение  $E_{\max}$  обычно в два раза меньше приведенного в формуле (2,1)\*).

Из выражения (2,1) следует, что для увеличения предельной энергии необходимо увеличивать амплитуду ускоряющего напряжения  $V_0$ . Однако значительное увеличение  $V_0$  сопряжено с большими техническими трудностями. В наиболее мощном работающем циклотроне  $V_0 = 410$  кВ, и соответственно практическая максимальная энергия протонов в этом ускорителе равна 22 МэВ.

Рассмотренные выше процессы оказываются по существу вредными для циклотрона, так как приводят к «сползанию» фазы и соответственно к ограничению предельной энергии частиц, получаемых на этой установке. Однако в этих процессах проявляется упомянутый ранее механизм автофазировки, который лежит в основе всех существующих в настоящее время резонансных ускорителей высоких энергий.

Из проведенного качественного анализа, явлений, происходящих при постоянном магнитном поле и постоянной частоте ускоряющего напряжения, можно сделать следующие выводы:

1. Существует устойчивое равновесное движение, соответствующее «точному» резонансу.

2. Для частиц, движение которых не удовлетворяет равновесному, при определенных условиях осуществляется «резонанс в среднем», т. е. радиусы их мгновенных орбит, энергия и частота обращения совершают колебания около резонансных значений этих величин.

Если резонанс в среднем, аналогичный рассмотренному выше, удастся осуществить в случае, когда равновесное движение соответствует не фазе  $\pi/2$ , а фазе, находящейся в «ускоряющей полуволне», т. е. соответствует не постоянству энергии частиц, а ее непрерывному увеличению, то тем самым и будет получен режим ускорения, который позволит в принципе беспредельно увеличивать энергию достаточного числа частиц. Возможность осуществления именно такого режима резонансного ускорения частиц, основанного на явлении автофазировки, и была подмечена и доказана В. И. Векслером.

В начале настоящего параграфа мы уже говорили, что изменением магнитного поля или частоты ускоряющего напряжения можно, в принципе, добиться в идеальных условиях ускорения «одной» частицы при «точном» резонансе. В. И. Векслер показал, что если эти параметры менять достаточно медленно, то резонанс для одной частицы и будет сопровождаться резонансом в среднем для большого числа других частиц. При этом ввиду «фазовой» устойчивости движения оказывается совершенно не обязательным поддерживать идеально точный резонанс для «равновесной» частицы, а необходимо только, чтобы за время, характерное для

\*) При выводе (2,1) магнитное поле предполагается однородным. Однако, как мы знаем, для обеспечения вертикальной фокусировки частиц это поле должно быть убывающим по радиусу. Если учесть также соображения, связанные с тем, чтобы интенсивность ускоренного пучка была не слишком малой, то и получится уменьшение коэффициента в формуле (2,1) примерно в два раза.

рассматриваемого процесса, т. е. за период фазовых колебаний, изменения равновесной фазы были малы.

Соответствующие методы резонансного ускорения частиц<sup>4,5</sup> оказались чрезвычайно плодотворными. Проведем вначале качественный анализ этих методов.

а) Метод изменения во времени магнитного поля

Предположим, что частица, частота обращения которой по мгновенной орбите совпадает в начальный момент с частотой электрического поля, прошла ускоряющий промежуток в некоторой фазе  $\varphi_s$ , соответствующей ускорению, и приобрела энергию  $eV_0 \cos \varphi_s = eV_s$ . Заставим теперь магнитное поле, управляющее движением частиц, нарастать во времени.

Если магнитное поле на той мгновенной орбите, по которой будет двигаться частица после получения энергии  $eV_0 \cos \varphi_s$ , изменится настолько, что частота обращения частицы останется прежней, то фаза частицы при следующем прохождении промежутка будет опять равна  $\varphi_s$ . Продолжая такое «уравновешивание», мы и получим равновесное движение. Исходя из формулы (1,96), при этом будем иметь:

$$\Delta\omega_s = -\frac{ec}{E_s} \Delta B_s + \frac{ecB_s}{E_s^2} \Delta E_s = \omega_s \left( \frac{\Delta B_s}{B_s} - \frac{\Delta E_s}{E_s} \right) = 0. \quad (2,2)$$

Здесь индекс «s» означает, что соответствующие величины относятся к равновесной частице. Например,  $B_s = B_0|_{r_0=r_s}$ , где  $r_s$  — радиус равновесной орбиты; через  $\omega_s$  обозначена частота обращения равновесной частицы, т. е.  $\omega_s = \omega_0|_{r_0=r_s}$ .

Имея в виду, что  $\Delta E_s = eV_0 \cos \varphi_s$ , из уравнения (2,2) получим следующее соотношение, связывающее равновесную фазу  $\varphi_s$  с приростом магнитного поля на равновесной орбите за время одного оборота при заданных  $\omega_s = \omega$  и  $V_0$ :

$$\cos \varphi_s = -\frac{c}{\omega_s V_0} \Delta B_s. \quad (2,3)$$

Отсюда, в частности, следует ограничение на скорость нарастания магнитного поля. Для существования равновесного движения необходимо, очевидно, чтобы

$$\left| \frac{c \Delta B_s}{\omega_s V_0} \right| < 1. \quad (2,4)$$

Ввиду того что  $\omega_s = \omega = \text{const}$  и соответственно  $T_s = \text{const}$ , для выполнения условия постоянства  $\varphi_s$  необходимо, чтобы магнитное поле  $B_s$  было линейной функцией времени, если амплитуда ускоряющего напряжения  $V_0 = \text{const}$ . Поскольку, однако, строгого выполнения постоянства «равновесной» фазы, как мы уже отмечали, не требуется, то и требование линейности функции  $B(r_s)$  надо понимать в том смысле, чтобы за время одного фазового колебания отклонение от линейного закона было небольшим. Полагая  $\Delta B_s = \frac{dB_s}{dt} T_s = \frac{dB_s}{dt} \frac{2\pi}{\omega_s}$ , получаем окончательно следующее выражение для  $\cos \varphi_s$  применительно к рассматриваемому случаю:

$$\cos \varphi_s = -\frac{2\pi c}{V_0 \omega_s^2} \frac{dB_s}{dt}, \quad (2,5)$$

где, очевидно,

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} \Big|_{r=r_s} + \frac{\partial B}{\partial r} \Big|_{r=r_s} \frac{dr_s}{dt} *). \quad (2,6)$$

Рассмотрим теперь частицу, энергия, радиус орбиты и частота обращения которой совпадают в начальный момент с соответствующими равновесными значениями, а начальная фаза  $\varphi_i \neq \varphi_s$ .

Если  $\omega_s$ ,  $V_0$ ,  $\frac{dB_s}{dt}$  выбраны такими, что  $\cos \varphi_s = 1$ , т. е.  $\varphi_s = 0$  и  $V_s = V_0$ , то, как мы сейчас покажем, автофазировки не будет. В какой бы фазе, не равной  $\varphi_s$ , не прошла частица ускоряющий промежуток, она получит энергию меньше равновесной, период ее будет меньше равновесного, фаза ее будет смещаться влево. Ясно, что энергия ее никогда не может сравняться с равновесной, так как она за каждый оборот получает энергию, меньшую (или на отдельных оборотах равную), чем равновесная частица, а это значит, что ее период все время меньше периода равновесной частицы, и фаза все время смещается влево. Таким образом, ускорение частиц при  $\varphi_s = 0$  невозможно: точный резонанс «неустойчив».

Пусть теперь  $\cos \varphi_s < 1$ . При этом точному резонансу соответствуют две фазы:  $\varphi_s$  и  $-\varphi_s$ . Будет ли теперь автофазировка и если будет, то какая равновесная фаза соответствует устойчивому резонансу?

Рассмотрим три возможных варианта:

$$\begin{aligned} -\varphi_s < \varphi_i < +\varphi_s, \\ \varphi_i < -\varphi_s, \\ \varphi_i > \varphi_s. \end{aligned}$$

Пусть  $-\varphi_s < \varphi_i < \varphi_s$ . Пройдя ускоряющий промежуток, частица получит при этом энергию, большую равновесной и ввиду увеличения периода обращения с увеличением энергии будет иметь на следующем обороте фазу, большую  $\varphi_i$ . Фаза будет продолжать смещаться до  $\varphi_s$  и дальше, но после  $\varphi_s$  частица начнет получать энергию меньше равновесной, и период ее будет уменьшаться. После того, как период сравняется с равновесным значением, фаза частицы начнет смещаться влево, дойдет до  $\varphi_i$ , а затем процесс повторится.

Если теперь  $\varphi_i < -\varphi_s$ , то частица «недополучит» (по сравнению с равновесной) энергию и будет все время удаляться от  $-\varphi_s$  влево.

В случае, если  $\varphi_i > \varphi_s$ , фаза пойдет также влево, и, следовательно, будет приближаться к  $\varphi_s$ . Пройдя  $\varphi_s$ , частица начнет получать избыток энергии по сравнению с равновесной, и если при своем дальнейшем смещении влево энергия частицы сравняется с энергией равновесной частицы до того, как фаза станет равной  $-\varphi_s$  (после  $-\varphi_s$  частица будет «недополучать» энергию), то фаза начнет двигаться вправо, и процесс повторится. Из проведенных рассуждений следует:

- 1) Если  $\cos \varphi_s = 1$ , то фазовые колебания невозможны.
- 2) Если  $\cos \varphi_s < 1$ , то происходят фазовые колебания, причем вследствие увеличения периода обращения частицы с увеличением ее энергий устойчивой фазой будет  $+\varphi_s$ .
- 3) Не при всех начальных фазах возможны фазовые колебания, а лишь в том случае, если  $-\varphi_s < \varphi_i < \varphi_{2 \max}$  (фаза  $\varphi_{2 \max} > \varphi_s$ , точное ее значение мы получим в следующем параграфе).

\*) Отметим, что  $\frac{dr_s}{dt}$  также выражается через  $\frac{\partial B}{\partial t} \Big|_{r=r_s}$  в силу (1,9а) и (1,9б), но на этом мы остановимся в следующем параграфе.

Очевидно, что чем больше область фазовой устойчивости, т. е. чем больший интервал допустимых фаз (с точки зрения осуществления резонанса в среднем), тем большее количество частиц может быть ускорено. Соответственно этому значение  $\varphi_s$  следует выбирать ближе к  $\varphi = \pi/2$ , т. е. чтобы превышение максимального прироста энергии ( $eV_0$ ) над равновесным ( $eV_s = eV_0 \cos \varphi_s$ ) было по возможности большим. А это значит, что  $V_0$  необходимо выбирать побольше, так как равновесный прирост энергии определяется скоростью изменения магнитного поля со временем (см. формулу (2,5)), которую нельзя сделать слишком малой, поскольку это приведет к большой длительности ускорения данной порции частиц и соответственно малой интенсивности в единицу времени.

Как и в случае автофазировки, в постоянном поле наличие отклонений частот обращения и соответственно энергии и радиусов мгновенных орбит частиц от равновесных значений уменьшает область допустимых фаз, причем наибольшая расстройка возможна при  $\varphi = \varphi_s$ . То обстоятельство, что в известных пределах такие расстройки не нарушают осуществление резонанса в «среднем», является вторым основным фактором, обеспечивающим возможность резонансного ускорения достаточного числа частиц. В дальнейшем мы покажем, что при заданном  $\varphi_s$  допустимые расстройки увеличиваются при увеличении  $V_0$ .

Сделаем одно замечание: при рассмотрении фазовых колебаний мы предполагали, что частицы движутся по мгновенным орбитам. Такое предположение оправдано лишь в том случае, когда период фазовых колебаний много больше периода свободных колебаний, равного обычно по порядку величины периоду обращения. Это условие, очевидно, выполняется, если прирост энергии частицы за один оборот много меньше ее энергии, что, как правило, в действительности имеет место.

б) Метод изменения во времени частоты ускоряющего напряжения

Рассмотрим теперь такой ускоритель, в котором магнитное поле постоянно, а резонанс для равновесной частицы обеспечивается уменьшением частоты ускоряющего напряжения. Пренебрегая здесь ради простоты зависимостью магнитного поля от радиуса, на основе (1,9б) будем иметь:

$$\Delta\omega_s = \frac{ecB_s}{E_s^2} \Delta E_s. \tag{2,7}$$

Полагая опять  $\Delta E_s = eV_0 \cos \varphi_s$  и аппроксимируя в пределах одного оборота  $\omega_s$  линейной функцией  $\Delta\omega_s = \frac{d\omega_s}{dt} \frac{2\pi}{\omega_s}$ , получим следующее выражение для равновесной фазы:

$$\cos \varphi_s = \frac{2\pi c B_s}{V_0 \omega_s^3} \frac{d\omega_s}{dt}. \tag{2,8}$$

Здесь опять, естественно, не требуется строгого постоянства  $\cos \varphi_s$  в течение всего времени ускорения, т. е. строгого постоянства величины  $\frac{B_s}{V_0 \omega_s^3} \frac{d\omega_s}{dt}$ ; необходимо лишь, чтобы за время одного фазового колебания эта величина менялась достаточно мало.

Метод, связанный с изменением во времени только магнитного поля (случай (а)) удобно применять для ускорения электронов, а для тяжелых частиц этот метод мало пригоден. Согласно (1,9а) и (1,9б)  $r_s = \frac{c\beta_s}{\omega_s}$ ,

и, поскольку в случае а)  $\omega_s = \text{const}$ , радиус равновесной частицы  $r_s$  меняется так же, как и ее скорость  $c\beta_s$ . При ускорении электронов с начальной энергией в несколько *Мэв* равновесный радиус будет оставаться практически постоянным, и это позволит использовать не сплошной магнит, а магнит в виде кольца. Для тяжелых частиц  $\beta_s$  будет сильно меняться, и делать массивный шихтованный магнит (ведь при изменении магнитного поля необходимо бороться с токами Фуко) технически нецелесообразно. Поэтому для тяжелых частиц выгоднее использовать постоянное во времени магнитное поле и модулировать частоту (случай б)). Наоборот, для электронов последний метод менее выгоден, чем первый: во-первых, отсутствует преимущество узкого кольца, во-вторых, требуется огромная глубина модуляции частоты, так как ввиду малости  $E_0$  для электронов  $\omega_s$  будет практически обратно пропорциональна кинетической энергии, начиная с нескольких *Мэв*.

Циклический резонансный ускоритель электронов с изменяющимся во времени магнитным полем был назван синхротроном. Ускоритель тяжелых частиц с меняющейся частотой называют фазотроном (а также синхротроном или циклотроном с модулированной частотой).

в) Одновременное изменение магнитного поля и частоты ускоряющего напряжения

Экономически наиболее выгодным для ускорения тяжелых частиц до высоких энергий является одновременное изменение магнитного поля и частоты ускоряющего напряжения. Подбором определенного закона изменения частоты можно добиться того, чтобы равновесный радиус оставался неизменным. Преимущество такого ускорителя перед фазотроном очевидно: вместо сплошного магнита фазотрона в этом ускорителе применяется кольцевой магнит. Следует, однако, сказать, что это преимущество покупается ценой существенного снижения интенсивности потока ускоренных частиц и преодоления многих дополнительных трудностей, о некоторых из которых мы будем говорить дальше.

Существующие в настоящее время наиболее мощные ускорители тяжелых частиц относятся к указанному здесь типу. Они получили название синхрофазотронов. Их называют также просто синхротронами или протонными синхротронами, поскольку они применяются для ускорения протонов.

Исходя из формул (1,9а) и (1,9б), нетрудно получить закон изменения частоты, удовлетворяющий требованию постоянства равновесного радиуса. Полагая в этих формулах  $\omega_0 = \omega_s$ ,  $r_0 = r_s$ ,  $B_0 = B_s$  и имея в виду, что  $\omega = \omega_s$ , найдем связь между частотой ускоряющего напряжения  $\omega$ , равновесным радиусом  $r_s$  и полем на этом радиусе  $B_s$ :

$$\omega = - \frac{eB_s c}{V (eB_s r_s)^2 + E_s^2} \quad (2,9)$$

Для постоянства равновесного радиуса частота, очевидно, должна меняться так, как это предписывается уравнением (2,9), если положить в нем  $r_s = \text{const}$ . При этом

$$\cos \varphi_s = - \frac{2\pi r_s^2 dB_s}{V_0 c dt} \quad (2,10)$$

Прежде чем перейти к более строгому рассмотрению движения частиц в резонансных циклических ускорителях, остановимся коротко на успехах, достигнутых в использовании резонансного метода для ускоре-

ния частиц до высоких энергий, которые обязаны открытию явления автофазировки.

Начиная с 1944 г., ускорители, основанные на принципе автофазировки, стали интенсивно внедряться в физические лаборатории. К настоящему времени во всем мире насчитывается около 15 крупных синхротронов, среди которых имеются установки, ускоряющие электроны до энергии в 1,5 *Бэв*, в то время как до 1944 г. с помощью бетатронов удавалось ускорять электроны до энергий всего лишь в 100 *Мэв*. Таким образом, за последние 12 лет энергия электронов, достижимая в лабораторных условиях, повысилась в 15 раз.

Еще более разительные успехи достигнуты в технике ускорения тяжелых частиц. Уже к 1950 г. на фазотроне удалось достигнуть энергии протонов 500 *Мэв*, что превышает предел энергий, получаемых на циклотроне, приблизительно в 25 раз. Самый мощный из фазотронов на энергию протонов 680 *Мэв* был построен в Советском Союзе под руководством Д. В. Ефремова, М. Г. Мещерякова, А. Л. Минца<sup>8</sup>.

Дальнейшее продвижение вверх по шкале энергий связано с синхрофазотронным методом ускорения. В настоящее время построено четыре таких установки, рассчитанные на энергию протонов свыше 1 *Бэв*. Наибольшая энергия протонов—10 *Бэв* достигнута на синхрофазотроне, построенном в Советском Союзе под руководством В. И. Векслера, Д. В. Ефремова и А. Л. Минца<sup>9\*</sup>).

### § 3. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

Из предыдущего уже можно составить представление о движении частиц в циклических резонансных ускорителях. Это движение разбивается на три составляющих:

1. Обращение частиц по равновесной орбите с частотой, равной частоте ускоряющего электрического поля, и очень медленно меняющимся или даже постоянным радиусом орбиты  $r_s$ .

2. Медленные радиально-фазовые колебания около равновесной орбиты, период которых обычно в несколько сот или даже тысяч раз больше периода обращения частиц. В процессе фазовых колебаний частицы двигаются по почти замкнутым орбитам, называемым мгновенными. Отметим, однако, что изменение радиуса орбит в этом случае происходит значительно быстрее, чем изменения радиуса равновесной орбиты.

3. Быстрые свободные колебания около мгновенной орбиты, период которых обычно порядка периода обращения частиц.

Подчеркнутая выше разница во временных характеристиках отдельных движений позволяет рассматривать их в подавляющем большинстве случаев независимо, т. е. отвлекаясь при рассмотрении одного движения от двух других.

Ниже мы выделим эти три вида движения из общих уравнений и рассмотрим некоторые, относящиеся к ним, важные вопросы, которые выше либо не были затронуты, либо были освещены только качественно и недостаточно полно. При этом мы будем основываться на оригинальных работах В. И. Векслера<sup>4, 5</sup>, а также М. С. Рабиновича<sup>10, 11, 12</sup>, Франка<sup>13</sup>, Бома и Фолди<sup>14, 15</sup> и других.

Уравнения движения частиц в зависящем от времени аксиально-симметричном магнитном поле при наличии ускоряющего электрического

<sup>\*</sup> Упомянутые выше советские ускорители—фазотрон на 680 *Мэв* и синхрофазотрон на 10 *Бэв* переданы в 1956 г. Объединенному институту ядерных исследований (ОИЯИ).

поля, направленного по  $\theta$ , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{r} \right) &= \frac{E}{c^2} r \dot{\theta}^2 + \frac{e}{c} r \dot{\theta} B_z, \\ \text{б) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} r^2 \dot{\theta} \right) &= -\frac{e}{c} r \dot{r} B_z + \frac{e}{c} r z \dot{B}_z - \frac{e}{2\pi c} \frac{\partial F}{\partial \theta} + Q_\theta, \\ \text{в) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{z} \right) &= -\frac{e}{c} r \dot{\theta} B_r, \\ \text{г) } E &= \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2]}}. \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

Уравнения (3,1а), (3,1в) и (3,1г) не отличаются, очевидно, от соответствующих уравнений (1,4а), (1,11) и (1,4г). Уравнение (3,1б), описывающее  $\theta$ -движение, содержит, в отличие от (1,10), два дополнительных члена:  $-\frac{e}{2\pi c} \frac{\partial F}{\partial \theta}$  — момент, обусловленный вихревой э. д. с., возникающей при изменении во времени магнитного потока

$$F = \int_0^r 2\pi r B_z dr, \quad (3,2)$$

и  $Q_\theta$  — момент силы, обусловленный ускоряющим электрическим полем. В уравнениях (3,1) не учтены диссипативные силы, обусловленные, например, реакцией излучения, возникающего вследствие движения частиц в магнитном поле. Вопросом об излучении мы в дальнейшем займемся специально, поэтому будем считать пока, что диссипативные силы отсутствуют.

Умножив (3,1а) на  $\frac{E}{c^2} \dot{r}$ , (3,1б) на  $\frac{E}{c^2} \dot{\theta}$ , (3,1в) на  $\frac{E}{c^2} \dot{z}$ , сложив полученные уравнения и воспользовавшись (3,1г), придем к следующему соотношению, описывающему изменение энергии во времени,

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\theta} \left( Q_\theta - \frac{e}{2\pi c} \frac{\partial F}{\partial t} \right). \quad (3,3)$$

Следовательно, энергия частицы изменяется в результате действия внешнего и индуцированного вихревого электрических полей. Действие вихревого электрического поля, присутствующего при изменении магнитного поля со временем, не учитывалось нами в предыдущем параграфе, однако учет его не меняет полученных ранее качественных результатов.

Переходя в (3,3) от дифференцирования по времени  $t$  к дифференцированию по азимуту  $\theta$ , будем иметь:

$$\frac{dF}{d\theta} = Q_\theta - \frac{e}{2\pi c} \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3,4)$$

Согласно (3,4) прирост энергии частицы на одном обороте за счет внешнего электрического поля равен  $\int_0^{2\pi} Q_\theta d\theta$ . Предполагая для простоты, что

имеется один ускоряющий промежуток и пренебрегая его протяженностью, мы можем сказать, что этот прирост должен быть в то же время равен  $eV_0 \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — фаза ускоряющего электрического поля в момент прохождения частицей ускоряющего промежутка. Иными

словами,  $\varphi = \int_0^{t/\theta = \theta_1 + 2\pi k} \omega dt + \xi$ , где  $\xi$  — некоторая начальная фаза,  $\theta_1$  — ази-

мут (в пределах  $0 < \theta_1 < 2\pi$ ) местонахождения ускоряющего промежутка,  $k$  — любое целое число. Исходя из этого,  $Q_\theta$  может быть записано в виде

$$Q_\theta = eV_0 \cos \left( \int_0^t \omega dt + \xi \right) \delta(\theta - \theta_1), \quad (3,5)$$

где  $\delta(\theta)$  — периодически повторяющаяся нормированная на единицу  $\delta$ -функция, период которой равен  $2\pi$ . При записи  $Q_\theta$  в виде (3,5) предпологалось, что прирост энергии в данном ускоряющем промежутке не зависит от  $r$  и  $z$ .

При рассмотрении движения частиц введем наряду с азимутом  $\theta$  другую переменную величину — фазу

$$\Phi = \left( \int_0^t \omega dt + \xi \right) - q(\theta - \theta_1), \quad (3,6)$$

связывающую азимут нахождения частицы с фазой ускоряющего электрического поля; здесь  $q$  — некоторое целое число. В те моменты времени, когда частица пересекает ускоряющий промежуток, «непрерывная» фаза  $\Phi$  совпадает с точностью до несущественного слагаемого, кратного  $2\pi$ , с введенной выше дискретной фазой  $\varphi$ . Исходя из (3,6), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \theta &= \theta_1 + \frac{\left( \int_0^t \omega dt + \xi \right) - \Phi}{q}, \\ \text{б) } \dot{\theta} &= \frac{1}{q} (\omega - \dot{\Phi}). \end{aligned} \right\} \quad (3,7)$$

Величина  $\dot{\Phi}/q$  описывает, следовательно, отклонение частоты обращения  $\dot{\theta}$  от равновесной частоты  $\omega_s = \frac{\omega}{q}$ , в целое число раз меньшей, чем частота электрического поля (величину  $q$  мы ввели для общности, имея ввиду возможность осуществления так называемого кратного резонанса).

В этом параграфе основными переменными, характеризующими движение частицы, будем считать  $r$ ,  $\Phi$ ,  $z$ ,  $E$ . Разлагая периодически повторяющуюся  $\delta$ -функцию в ряд Фурье и переходя от переменной  $\theta$  к  $\Phi$ , согласно (3,6) будем иметь вместо (3,1) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{r} \right) &= \frac{E}{c^2} r \frac{(\omega - \dot{\Phi})^2}{q^2} + \frac{e}{c^2} r \frac{(\omega - \dot{\Phi})}{q} B_z, \\ \text{б) } \frac{d}{dt} \left[ \frac{E}{c^2} r^2 \frac{\omega - \dot{\Phi}}{q} \right] &= -\frac{e}{2\pi c} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{e}{c} r \dot{r} B_z + \frac{e}{c} r \dot{z} B_r + \\ &+ \frac{eV_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \cos \left[ \frac{k}{q} \Phi + \left( 1 - \frac{k}{q} \right) \left( \int_0^t \omega dt + \xi \right) \right], \\ \text{в) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{z} \right) &= -\frac{e}{c} r \frac{(\omega - \dot{\Phi})}{q} B_r, \\ \text{г) } E &= \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[ \dot{r}^2 + r^2 \frac{(\omega - \dot{\Phi})^2}{q^2} + \dot{z}^2 \right]}}. \end{aligned} \right\} \quad (3,8)$$

Выделим из этих уравнений три типа движений, о которых говорилось выше.

### а) Равновесное движение

При рассмотрении равновесного движения необходимо положить  $\Phi = \Phi_s$  и  $\dot{\Phi}_s = 0$ , поскольку равновесное движение соответствует постоянству фазы  $\varphi$  и движению частиц с частотой обращения, равной (или в более общем случае в  $q$  раз меньшей) частоте ускоряющего электрического поля, что и означает постоянство непрерывной фазы  $\Phi_s$  \*).

Для выделения равновесного движения необходимо пренебречь также инерционным членом  $\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} r \right)$  в уравнении (3,8а), членом  $r^2$  в уравнении (3,8г) и положить начальные значения  $z$  и  $\dot{z}$  равными нулю. Далее, из всей суммы бесконечного числа членов, стоящей справа в уравнении (3,8б), следует оставить лишь один член с  $k=q$ , так как при  $\Phi = \Phi_s = \text{const}$  все остальные члены будут быстро осциллировать, и в среднем вклад этих членов будет равен нулю \*\*).

При этих предположениях после некоторых преобразований уравнения (3,8) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \omega_s &= \frac{\omega}{q} = \frac{-eB_s c}{\sqrt{(eB_s r_s)^2 + E_0^2}}, \\ \text{б) } \cos \Phi_s &= -\frac{2\pi}{eV_0} \left[ r_s \frac{d}{dt} (r_s B_s) - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F_s}{\partial t} \right], \\ \text{в) } z_s &= 0, \\ \text{г) } E_s &= \sqrt{(eB_s r_s)^2 + E_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

При заданных законах изменения со временем  $\omega(t)$  и изменения со временем и радиусом магнитного поля, которое мы считаем имеющим вид  $B_s = \frac{A(t)}{r_s^n}$ , уравнения (3,9) полностью определяют все четыре величины, характеризующие движение равновесной частицы:  $r_s$ ,  $\Phi_s$ ,  $z_s$ ,  $E_s$  (уравнения (3,9а) и (3,9г) соответствуют, очевидно, (1,9б) и (1,9а), если в последних положить  $r_0 = r_s$ ,  $\omega_0 = \omega_s$ ,  $B_0 = B_s$ ,  $E = E_s$ ). Имея в виду, что уравнение (3,9а) дает возможность выразить  $r_s$  через  $\omega(t)$  и  $A(t)$ , мы можем раскрыть смысл выражений  $\frac{dr_s}{dt}$  и  $\frac{dB_s}{dt} = \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{\partial B_s}{\partial r_s} \frac{dr_s}{dt}$ , входящих в правую часть соотношения (3,9б), определяющего равновесную фазу  $\Phi_s$ . В общем случае при изменении во времени как частоты, так

\*) Как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, вообще говоря,  $\varphi_s \neq \text{const}$  или соответственно  $\Phi_s \neq \text{const}$  на протяжении всего процесса ускорения. Отсюда следует, что полагая в уравнениях (3,8)  $\dot{\Phi}_s = 0$ , мы можем получить результат, противоречащий этому предположению, т. е. приходим к выводу о невозможности строгого резонанса. Если же в результате математической проверки окажется, что полученное «решение» с определенной степенью точности удовлетворяет исходным уравнениям, то это и будет соответствовать физическому утверждению, которое мы фактически уже делали раньше, а именно: понятие равновесного движения имеет смысл в том случае, если за период фазовых колебаний изменение «равновесной фазы» достаточно мало.

\*\*) Если выше мы отвлекались от небольших фазовых и свободных колебаний, которые могут возникнуть при медленном изменении «равновесной фазы» и равновесного радиуса (назовем их колебаниями установления), то здесь мы отвлекаемся от так называемых «щелевых» колебаний, связанных с дискретностью ускорения: действие ускоряющего электрического поля «размазывается» на всю орбиту.

и магнитного поля, мы будем иметь:

$$\dot{r}_s = \frac{r_s}{[\beta_s^2 + n(1 - \beta_s^2)]} \left[ (1 - \beta_s^2) \frac{1}{B_s} \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{1}{\omega_s} \frac{d\omega_s}{dt} \right], \quad (3,10)$$

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{B_s}{[\beta_s^2 + n(1 - \beta_s^2)]} \left[ \beta_s^2 \frac{1}{B_s} \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{n}{\omega_s} \frac{d\omega_s}{dt} \right], \quad (3,11)$$

где, очевидно,

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{A(t)}{r_s^n} \right] = \frac{1}{r_s^n} \frac{dA}{dt}.$$

Используя (3,10) и (3,11), можно из (3,9б) получить те же выражения для  $\cos \Phi_s$  применительно к синхротрону, фазотрону и синхрофазотрону, которые были приведены в предыдущем параграфе, если пренебречь в (3,9б) величиной  $\frac{\partial F_s}{\partial t}$ . Заметим при этом, что поскольку выражение для  $\cos \Phi_s$  в фазотроне (см. (2,8)) было найдено в предположении однородности магнитного поля, то для получения этого выражения необходимо положить в (3,10)  $n = 0$ .

На основе (3,9б), (3,10) и (3,11) запишем теперь общее выражение для  $\cos \Phi_s$ , справедливое для всех рассмотренных нами циклических резонансных ускорителей:

$$\cos \Phi_s = -\frac{2\pi}{V_0} \left[ \frac{r_s^2}{c} (1 - \delta_s) \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{c(1 - \beta_s^2)}{\omega_s^2 K_s} \frac{\partial B_s}{\partial t} + \frac{E_s}{e\omega_s^2 K_s} \frac{d\omega_s}{dt} \right], \quad (3,12)$$

$$K_s = 1 + \frac{n}{1 - n\beta_s^2}, \quad \delta_s = \frac{\frac{\partial F_s}{\partial t}}{2\pi r_s^2 \frac{\partial B_s}{\partial t}}. \quad (3,13)$$

Величина  $\delta_s$  близка к нулю в синхрофазотроне и синхротроне ввиду отсутствия в магните этих ускорителей центрального сердечника и равна, естественно, нулю в фазотроне. Таким образом, при определении равновесной фазы в синхротроне в синхрофазотроне можно не учитывать, как это и делалось в предыдущем параграфе, наличия вихревого электрического поля.

При  $\frac{d\omega_s}{dt} = 0$  из соотношения (3,12) получаем  $\cos \Phi_s$  для синхротрона, выраженный теперь через  $\frac{\partial B_s}{\partial t}$ , а не через  $\frac{dB_s}{dt}$ , как раньше.

При  $\frac{\partial B_s}{\partial t} = 0$  имеем случай фазотрона (при  $n = 0$  величина  $K_s = 1$  и из (3,12) получается формула (2,8)).

При  $r_s = 0$  два последних члена в выражении (3,12) взаимно уничтожаются и получается выражение для  $\cos \Phi_s$  синхрофазотрона.

Заканчивая рассмотрение равновесного движения, подчеркнем, что если в начальный момент радиальная координата, фаза и вертикальная координата частицы совпадают с равновесными значениями (см: формулы (3,9) и (3,12)), а вектор скорости частицы направлен по касательной к равновесной орбите, радиус которой  $r_s$  определяется при заданных  $\omega(t)$  и  $A(t)$  из (3,9а), то частица будет все время двигаться по этой орбите\*).

Рассмотрим теперь, к чему приводят некоторые отклонения от равновесного движения. Положим  $r = r_s + \rho$  и будем рассматривать движение таких частиц в линейном приближении по  $\frac{\rho}{r_s}$ ,  $\frac{z}{r_s}$ ,  $\frac{\rho}{r_s \omega_s}$ ,  $\frac{z}{r_s \omega_s}$ ,  $\frac{\Phi}{q\omega_s}$ .

\*) Это утверждение верно, конечно, с точностью до пренебрежения колебаниями установления и щелевыми колебаниями, о чем говорилось выше.

## б) Свободные (быстрые) колебания

Рассмотрим сначала свободные колебания, т. е. предположим, что в начальный момент  $E_i = E_s$ ,  $\Phi_i = \Phi_s$ , но координаты  $r_i$  и  $z_i$  не совпадают с равновесными, и вектор скорости не направлен по касательной к равновесной орбите. Отличие координат от  $r_s$  и угол наклона вектора скорости к равновесной орбите считаем малыми. Используя (3,8) и (3,9) и пренебрегая связью между свободными колебаниями и процессом ускорения (это выражается в том, что в (3,8б) мы полагаем  $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_s = \text{const}$ , но  $\dot{\Phi} \neq 0$ ), получим в линейном приближении следующие уравнения, описывающие свободное движение:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d}{dt}(E_s \dot{\rho}) + E_s \omega_s^2 (1-n) \rho &= 0, \\ \text{б) } \frac{d}{dt}(E_s \dot{z}) + E_s \omega_s^2 n z &= 0, \\ \text{в) } \frac{d\Phi}{dt} &= q \omega_s \frac{\rho}{r_s}, \\ \text{г) } E &= E_s. \end{aligned} \right\} \quad (3,14)$$

При постоянстве энергии частицы и магнитного поля во времени эти уравнения переходят, естественно, в уравнения (1,15).

Для рассмотрения вопроса о влиянии медленного изменения  $E_s$  и  $\omega_s$  воспользуемся так называемым адиабатическим инвариантом. Известно, что в колебательной системе с одной степенью свободы адиабатическим инвариантом (т. е. постоянной величиной) при медленно изменяющихся параметрах системы является

$$I = \oint p dq, \quad (3,15)$$

где  $p$  и  $q$  — обобщенные импульс и координата системы, а интеграл берется по периоду колебания. В нашем случае, например, для  $\rho$ -движения  $I = \oint E_s \dot{\rho} d\rho$ . Пренебрегая изменением параметров за время одного колебания и выражая  $\dot{\rho}$  через  $\rho$ , получим

$$I = 2E_s \omega_s \sqrt{1-n} \int_{-a_r}^{+a_r} \sqrt{a_r^2 - \rho^2} d\rho,$$

где  $a_r$  — амплитуда колебания. Нетрудно показать, что это выражение адиабатического инварианта можно привести к виду

$$I = 2\pi c^2 \frac{W_r}{\omega_r}, \quad \text{т. е. } \frac{W_r}{\omega_r} = \text{const}. \quad (3,16)$$

Здесь  $W_r$  — энергия колебаний ( $W_r = \frac{1}{2c^2} E_s \omega_r^2 a_r^2$ ), а  $\omega_r$  — частота колебаний (см. (1,16)). Таким образом, при медленно меняющихся параметрах осциллятора отношение его энергии к частоте остается неизменным. Исходя из (3,16), найдем:

$$a_r = \text{const} (1-n)^{-1/4} (E_s \omega_s)^{-1/2}.$$

Аналогичная формула имеет место и для вертикальных колебаний. Согласно (3,9а) и (3,9г)  $E_s \omega_s \sim B_s$ . Таким образом, амплитуда свободных колебаний затухает с увеличением магнитного поля по закону  $a \sim \frac{1}{\sqrt{B_s}}$ .

Если магнитное поле постоянно во времени, но убывает с увеличением  $r_s$ , то амплитуда свободных колебаний будет возрастать (при этом предполагается, естественно, что  $n = \text{const}$ ).

в) Радиально-фазовые (медленные) колебания

Рассмотрим теперь радиально-фазовые колебания. Положим, что  $E_i \neq E_s$ ,  $\Phi_i \neq \Phi_s$ , а начальная радиальная координата такова, что частица находится на своей мгновенной орбите, т. е. согласно (1,9а) и (1,9б)  $E_i = \sqrt{[eB_{0i} r_{0i}]^2 + E_0^2}$ , и вектор скорости направлен по касательной к этой орбите.

При рассмотрении этого случая будем использовать ту же линеаризацию, что и выше. Величиной  $r$  в уравнении (3,8а) пренебрежем, т. е. отвлечемся от «свободных колебаний установления», чему соответствует предположение о «слежке»  $r$  за изменением радиуса мгновенной орбиты в процессе фазовых колебаний;  $z = 0$ , поскольку мгновенная орбита лежит в плоскости  $z = 0$ .

В этих предположениях в линейном приближении по указанным выше переменным получим следующие уравнения, описывающие радиально-фазовые колебания частиц в процессе ускорения,

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{K_s \omega_s^2} \frac{1}{q} \frac{d\Phi}{dt} \right) - \frac{eV_0}{2\pi} \cos \Phi &= -\frac{eV_0}{2\pi} \cos \Phi_s, \\ \text{б) } \frac{\rho}{r_s} &= \frac{1}{q \omega_s} \frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{(1-n) \beta_s^2 K_s}, \quad \rho = r_0 - r_s, \\ \text{в) } \frac{\Delta E}{E_s} &= (1-n) \beta_s^2 \frac{\rho}{r_s}, \quad \Delta E = E - E_s, \\ \text{г) } z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,17)$$

Поскольку  $\frac{E_s}{q K_s \omega_s^2} > 0$  ( $K > 0$ , так как  $0 < n < 1$ ) и  $eV_0 > 0$ , уравнение (3,17а) совпадает с уравнением для маятника с внешним моментом и медленно меняющимися параметрами (рис. 4). Колебательному движению маятника около устойчивого положения равновесия  $\Phi_s$  соответствуют согласно (3,17) колебания фазы частицы  $\Phi$ , радиуса  $r_0$  и энергии  $E$  около их равновесных значений  $\Phi_s$ ,  $r_s$ ,  $E_s$ . Неустойчивый случай, т. е. отсутствие радиально-фазовых колебаний, соответствует вращению маятника.

Рассмотрим краткое условие, при которых возможны радиально-фазовые колебания, т. е. колебания маятника с внешним моментом, в предположении, что параметры уравнений (3,17а) не меняются во времени. При этом мы будем считать, что  $\cos \Phi_s > 0$ , так как только в этом случае равновесная частица будет ускоряться, поскольку  $\cos \Phi_s < 0$

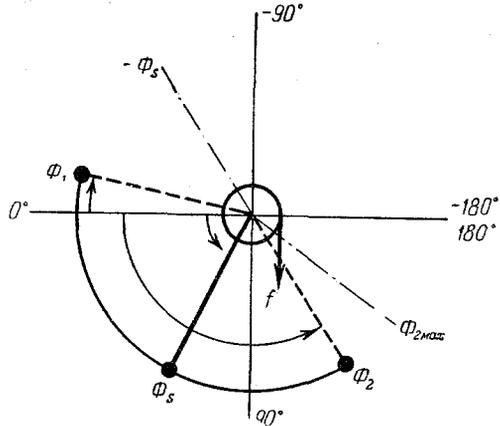


Рис. 4. Модель маятника с внешним моментом, создаваемым силой  $f$ . Положению устойчивого равновесия маятника отвечает угол  $\Phi_s$ , положению неустойчивого равновесия маятника соответствует угол  $-\Phi_s$  (если  $f=0$ , то  $\Phi_s = \pi/2$ ). Углы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — левая и правая точки поворота маятника, совершающего колебания.

соответствует замедлению частиц, а  $\cos \Phi_s = 0$  отвечает постоянству равновесной энергии (случай циклотрона).

Умножая обе части уравнения (3,14а) на  $\dot{\Phi}$  и интегрируя его один раз, приходим к соотношению, определяющему закон сохранения энергии маятника

$$\frac{1}{2} \left( \frac{E_s \dot{\Phi}^2}{q \omega_s^2 K_s} \right) + U(\Phi) = C, \quad (3,18)$$

где первый член соответствует кинетической энергии,  $U(\Phi) = \frac{eV_0}{2\pi} (\Phi \cos \Phi_s - \sin \Phi)$  — потенциальная энергия, а  $C$  — постоянная величина.

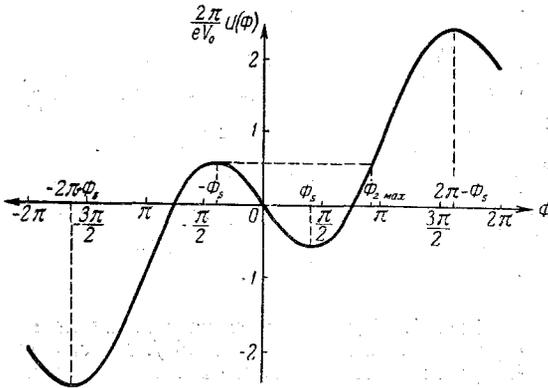


Рис. 5. График функции  $U(\Phi)$ , определяющей потенциальную энергию маятника, движение которого эквивалентно фазовому движению частиц в процессе ускорения, при  $\cos \Phi_s = 0,3$ .

Для определенности будем считать, что начальные фазы лежат в пределах  $-\pi < \Phi_i < \pi^*$ . Областью устойчивости по фазам будет тогда область  $-\Phi_s < \Phi < \Phi_{2\max}$ , где  $\Phi_{2\max}$  определяется, очевидно, из трансцендентного уравнения  $U(\Phi_{2\max}) = U(-\Phi_s)$ , т. е.

$$\Phi_{2\max} \cos \Phi_s - \sin \Phi_{2\max} = \sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s. \quad (3,19)$$

Каждому значению начальной фазы  $\Phi_i$ , лежащей в области устойчивости, соответствует максимально допустимое значение  $\dot{\Phi}_i$ , при котором возможно еще колебательное движение. Ограничение на  $\dot{\Phi}_i$  с точки зрения маятника можно трактовать как ограничение на начальный «толчок»; при слишком сильном толчке движение маятника будет вращательным. Наибольший допустимый «толчок» соответствует начальной фазе  $\Phi_i = \Phi_s$ , так как в этом случае потенциальная функция  $U(\Phi)$  имеет минимум (см. рис. 5).

С точки зрения ускорителей ограничение на  $\dot{\Phi}_i/q$  означает ограничение на начальную расстройку между частотами обращения равновесной и не равновесной частиц (см. формулу (3,7)) и соответственно

\*) Добавление к начальным условиям  $2\pi k$  для маятника не внесет ничего нового, а будет соответствовать лишь другому определению нуля потенциальной энергии.

Очевидно, движение возможно лишь тогда, когда полная энергия  $C$  больше или равна потенциальной энергии  $U(\Phi)$ . Из графика на рис. 5 видно, что в зависимости от начальных величин  $\Phi_i$  и  $\dot{\Phi}_i$  движение маятника будет либо колебательным, либо вращательным. Колебательное движение возможно, если начальная фаза  $\Phi_i$  лежит в «яме» функции  $\frac{2\pi}{eV_0} U(\Phi)$  и если  $\dot{\Phi}_i$  таково, что величина  $\frac{2\pi}{eV_0} C$  не превышает ближайшего «горба». В противном случае движение будет не колебательным, а вращательным.

на начальную расстройку радиусов мгновенных орбит и энергий частиц относительно их равновесных значений.

Исходя из сказанного выше, нетрудно получить на фазовой плоскости ( $\dot{\Phi}$ ,  $\Phi$ ) замкнутую кривую — сепаратрису, ограничивающую область значений  $\dot{\Phi}$  и  $\Phi$ , соответствующих колебательному движению, а также интегральные кривые движения при различных начальных условиях (рис. 6). Уравнение сепаратрисы получим из (3,18), если положим  $C = U(\Phi)|_{\dot{\Phi} = -\dot{\Phi}_s}$ ,

$$\dot{\Phi}_{сеп} = \pm \omega_s \sqrt{\frac{eV_0 K_s q}{\pi E_s}} \sqrt{(\sin \Phi - \dot{\Phi} \cos \Phi_s) + (\sin \Phi_s - \dot{\Phi}_s \cos \Phi_s)}. \quad (3,20)$$

Уравнения интегральных кривых имеют вид

$$\dot{\Phi} = \pm \omega_s \sqrt{\frac{eV_0 K_s q}{\pi E_s}} \sqrt{(\sin \Phi - \dot{\Phi} \cos \Phi_s) - (\sin \Phi_0 - \dot{\Phi}_0 \cos \Phi_s)}, \quad (3,21)$$

где через  $\Phi_0$  обозначено значение фазы при  $\dot{\Phi} = 0$ , т. е. левая ( $\Phi_1$ ) или правая ( $\Phi_2$ ) точки поворота (см. рис. 6). Как мы уже говорили в предыдущем параграфе и как теперь видно из выражения для  $U(\Phi)$  и модели маятника, область устойчивости по координате  $\Phi$  тем больше, чем ближе  $\Phi_s$  к  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. чем меньше отношение равновесного прироста энергии к максимальному. Размеры области устойчивости по координате  $\dot{\Phi}$  пропорциональны  $\sqrt{V_0}$  (см. (3,20)). Поскольку большая область устойчивости по обеим координатам соответствует, вообще говоря, большей интенсивности потока ускоренных частиц,  $V_0$  необходимо выбирать возможно большим\*).

Как видно из рис. 6, интегральные кривые (фазовые траектории), близкие к  $\Phi_s$ , имеют форму эллипсов, т. е. им соответствуют гармонические колебания. Уравнение для этих колебаний можно получить линеаризацией уравнения (3,17а)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{K_s \omega_s^2} \frac{1}{q} \dot{\eta} \right) + \left( \frac{eV_0}{2\pi} \sin \Phi_s \right) \eta = 0, \quad (3,22)$$

где  $\eta = \Phi - \Phi_s$ . Исходя из этого, получим следующее выражение для частоты малых фазовых колебаний:

$$\Omega = \omega_s \sqrt{\frac{eV_0 K_s q \sin \Phi_s}{2\pi E_s}}. \quad (3,23)$$

Под корнем в формуле (3,23) имеется отношение  $\frac{eV_0}{E_s}$ , которое мало да-

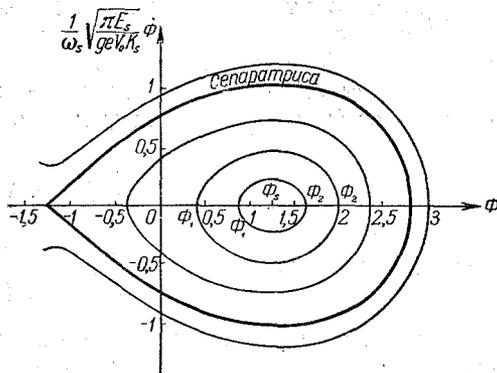


Рис. 6. Сепаратриса и интегральные кривые при  $\cos \Phi_s = 0,3$ . Интегральные кривые внутри сепаратрисы замкнуты, что соответствует устойчивому, колебательному движению частиц. Интегральная кривая вне сепаратрисы не замкнута и соответствует нерезонансному движению частиц (вращение эквивалентного маятника).

\*) Конечно, это утверждение является верным лишь в известных пределах, что связано с наличием вертикальных стенок камеры ускорителей.

же при энергии инжекции. Малость этого отношения и определяет, в основном, то обстоятельство, что  $\Omega$  меньше  $\omega_s$  обычно в сотни или даже тысячи раз. Таким образом, это подтверждает наше предположение о возможности независимого рассмотрения свободных и фазовых колебаний, т. е. пренебрежения процессами установления при рассмотрении радиально-фазовых колебаний и влиянием радиально-фазовых колебаний на свободные колебания. Последнее, например, позволяет нам сохранить формулы (3,14) и в случае, когда свободные колебания происходят не около равновесной, а около мгновенной орбиты, подставив в них вместо  $E_s$  и  $\omega_s$  энергию и частоту обращения частицы на мгновенной орбите.

Ввиду адиабатического изменения параметров в уравнениях (3,17) амплитуда малых фазовых колебаний в процессе ускорения не остается постоянной, но, как отмечалось в разделе б) этого параграфа, отношение энергии колебаний к их частоте не меняется. Из этого инварианта, учитывая выражение (3,23) для частоты, легко получим, что амплитуда малых колебаний фазы в синхротроне затухает как  $B_s^{-1/4}$ , в фазотроне примерно как  $\omega^{3/4}$ . Радиальные колебания, связанные с колебаниями фазы (формула (3,176)), затухают значительно быстрее.

Для того чтобы представить движение частиц в процессе ускорения, обусловленное медленными радиально-фазовыми колебаниями, перейдем от переменной  $\Phi$  к азимуту  $\theta$  по формулам (3,6) и (3,7). При кратности  $q=1$  азимут равновесной частицы меняется во времени согласно (3,7) по тому же закону, что и фаза ускоряющего напряжения

$$\theta_s = \theta_1 + \left( \int_0^t \omega dt + \xi \right) - \Phi_s, \quad \Phi_s = \text{const}, \quad (3,24)$$

а для других частиц

$$\theta - \theta_s = -(\Phi - \Phi_s). \quad (3,25)$$

Если начальное значение  $\Phi$  лежит в пределах сепаратрисы, то фаза совершает медленные колебания около  $\Phi_s$ , чему, согласно (3,25), будут соответствовать медленные колебания азимута  $\theta$  около  $\theta_s$ , а также (см. (3,176)) медленные колебания радиуса орбиты частицы около  $r_s$ . Иными словами, такие частицы будут то опережать равновесные частицы, то отставать от них, смещаясь при этом по радиусу. Те же частицы, для которых фаза  $\Phi$  слишком сильно отличается от  $\Phi_s$  и находится вне сепаратрисы, т. е. азимут слишком далек от  $\theta_s$ , не смогут совершать медленных колебаний около равновесной частицы, а будут все время отставать от нее и в конце концов будут потеряны (попадут, например, на стенки ускоряющей камеры).

Таким образом, мы имеем следующую картину движения частиц в процессе ускорения. Частицы образуют протяженный в направлении азимута сгусток с размерами в  $150 \div 200^\circ$ , который вращается как целое по закону движения равновесной частицы. Помимо движения вместе со всем сгустком, частицы перемещаются и внутри него, совершая описанные выше радиально-фазовые колебания. Для получения полной картины движения необходимо к медленным колебаниям добавить еще быстрые колебания по радиусу, вертикали и азимуту (формулы (3,14)).

При кратности  $q > 1$  будет, очевидно, иметься  $q$  отдельных сгустков частиц. Это ясно из тех соображений, что частицы, отстоящие друг от друга по азимуту на  $2\pi/q$ , будут проходить ускоряющий промежуток при одной и той же фазе ускоряющего напряжения, если частота обращения этих частиц в  $q$  раз меньше частоты ускоряющего поля. Следовательно, будет иметься  $q$  равновесных частиц и соответственно  $q$  сгустков,

равномерно распределенных по азимуту. Наличие  $q$  равновесных частиц и  $q$  сгустков следует, конечно, и из строгого рассмотрения. Суммарная протяженность по азимуту всех сгустков будет той же, что и протяженность одного сгустка при  $q=1$ . Размеры устойчивой области для медленных колебаний по радиусу будут согласно (3,20) и (3,176) в  $\sqrt{q}$  раз меньше, чем при  $q=1$ . Уменьшение области устойчивости в радиальном направлении является в известной мере недостатком метода кратного ускорения. Однако в тех случаях, когда требуется достаточно большая амплитуду ускоряющего напряжения (например, для компенсации потерь энергии частиц на излучение в синхротронах на большие энергии), удобно, по-видимому, использовать кратное ускорение, так как технически на больших частотах можно в резонаторах получать существенно большие напряжения. Использование кратного ускорения целесообразно также в так называемых «сильнофокусирующих» ускорителях, о которых будет говориться в дальнейшем.

До сих пор мы рассматривали движение частиц в «идеальных ускорителях», то есть не учитывали влияния различного рода возмущений в магнитном поле, в амплитуде и частоте ускоряющего электрического поля и т. д. Между тем при определенных условиях даже малые возмущения могут привести к существенным отклонениям от рассмотренных нами процессов, а в отдельных случаях и к нарушению работы ускорителя вообще. Речь идет о возникновении различных резонансных явлений, могущих привести к значительной раскачке свободных или фазовых колебаний и выводу частиц из той геометрической области, где выполняются условия устойчивости этих видов колебаний. Резонансы наиболее простого типа возникают при совпадении периода колебаний с периодом возмущений. Например, если в переменном магнитном поле в частоте или амплитуде ускоряющего напряжения имеются гармонические составляющие, период которых совпадает с периодом фазовых колебаний\*), то возникнет резонансная раскачка этих колебаний. Резонансы такого сорта со свободными колебаниями в ускорителях с магнитным полем рассмотренного нами типа при  $0 < n < 1$  не возникают. Дело в том, что при  $0 < n < 1$  периоды свободных колебаний

$$T_r = \frac{T_0}{\sqrt{1-n}} \quad \text{и} \quad T_z = \frac{T_0}{\sqrt{n}},$$

где  $T_0$ —период обращения частицы, таковы, что одно полное колебание совершается за время, в течение которого частица сделает больше одного оборота, а возмущения магнитного поля, которые могли бы отразиться на свободных колебаниях, имеют максимальный период, равный обороту. Отметим, однако, что в однородном поле ( $n=0$ ), когда период «радиальных колебаний» соответствует одному обороту, возник бы резонанс указанного типа, чему и соответствовала бы резонансная неустойчивость радиального движения в этом случае, о которой мы упоминали в первом параграфе. Аналогичный резонанс с вертикальными колебаниями возник бы соответственно при  $n=1$ . К раскачке свободных колебаний при  $0 < n < 1$  могут привести так называемые параметрические резонансы и резонансы связи вертикальных и радиальных колебаний. Параметрический резонанс с радиальными колебаниями может возникнуть при наличии в  $n$  (т. е. в упругой силе осциллятора—см. уравнения (3,14)) гармоники с периодом  $2\pi$ , т. е. с периодом в один оборот частицы, и при среднем значении  $n=0,75$ , когда период радиальных колебаний соответствует двум оборотам, или в два раза больше периода возмущения.

\*) Эти гармоники обычно появляются при использовании источников питания переменного тока и являются кратными стандартной частоте этого тока.

Для вертикальных колебаний этот резонанс осуществляется соответственно при  $n=0,25$ . При значении  $n=0,5$  частоты вертикальных и радиальных колебаний совпадают и связь этих колебаний, которая проявляется при наличии перекасов поверхности (на которой  $V_r=0$ ) приводит к попеременной перекачке колебательной энергии из одного вида колебания в другой и соответственно попеременной раскачке амплитуд этих колебаний. Наличие нелинейной связи радиальных и вертикальных свободных колебаний, которой мы в уравнениях (3,14) пренебрегли, также может при определенных условиях привести к резонансной перекачке энергии из одного вида колебания в другой. Это осуществляется, например, при значениях  $n=0,2$  и  $n=0,8$ , когда период вертикальных колебаний в два раза больше или соответственно в два раза меньше периода радиальных колебаний.

Эффекты, о которых мы коротко упомянули выше, учитываются при конструировании ускорителей и обычно для них выбираются нерезонансные значения  $n$ . Однако ввиду того, что  $n$  не бывает строго постоянным, а, скажем, зависит от радиуса, резонансные явления могут приводить к неприятным последствиям.

Наряду с резонансными явлениями в рассматриваемых здесь ускорителях большую опасность представляет и неприводящее к резонансу при  $0 < n < 1$  наличие небольшой зависимости вертикальной и радиальной составляющих магнитного поля от азимута, так как это может вызвать довольно большие искажения равновесной орбиты, что нежелательно ввиду ограниченности апертуры камеры ускорителя. Эти искажения, естественно, тем больше, чем ближе  $n$  к одному из резонансных значений ( $n=0$  и  $n=1$ ).

Освещение и разработка самых разнообразных вопросов, касающихся теории циклических резонансных ускорителей, в основу которых положен принцип автофазировки, содержится в работах многих зарубежных и советских ученых. В частности, большой вклад в создание теории этих ускорителей внесли советские физики М. С. Рабинович, А. А. Коломенский и В. В. Владимирский.

#### § 4. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ОТДЕЛЬНЫХ ТИПОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

В предыдущих параграфах мы рассмотрели общие закономерности, присущие резонансным циклическим ускорителям. Однако при конструировании отдельных установок приходится учитывать ряд особенностей, характерных только для данного типа ускорителей, связанных либо с сортом ускоряемых частиц (наличие излучения в синхротроне), либо с величиной конечной энергии (трудности вывода частиц в фазотроне и синхрофазотроне), либо с некоторыми важными вопросами, касающимися конструкции ускорителей (например, наличие прямолинейных промежутков в синхрофазотроне) и т. п. При характеристике каждого типа ускорителей мы будем останавливаться, в основном, на наиболее характерных особенностях, что послужит дополнением к предыдущему и позволит составить более полное представление о физических основах работы резонансных циклических ускорителей.

#### А. Синхротрон

Как уже отмечалось в § 2, синхротроном называется циклический резонансный ускоритель электронов с постоянной частотой ускоряющего поля и медленно меняющимся магнитным полем. В синхротроне, как

и в другом ускорителе электронов—бетатроне, частицы ускоряются в кольцевой вакуумной камере, но вес электромагнита синхротрона значительно меньше, что делает его экономически более выгодным. Уменьшение веса электромагнита объясняется тем, что в синхротроне ускорение осуществляется высокочастотным полем, а в бетатроне для создания вихревого ускоряющего электрического поля необходим большой сердечник. Так как в синхротроне используется ускоряющее поле с постоянной частотой, резонансное ускорение в нем удобно начинать с энергий 2—4 Мэв, когда скорость электронов достаточно близка к скорости света ( $\beta \approx 0,97—0,99$ ) и, следовательно, радиус равновесной орбиты  $r_s = \frac{c^2 \beta_s}{\omega_s}$

в процессе ускорения практически не меняется. Предварительное ускорение до таких энергий в большинстве синхротронов осуществляется в бетатронном режиме.

Как в бетатроне, так и в синхротроне при ускорении электронов до релятивистских энергий проявляется очень важное свойство электронов—излучение ими части своей энергии в виде электромагнитных волн. Это излучение возникает вследствие того, что электрон, двигаясь в ускорителе по искривленной траектории, обладает центростремительным ускорением. Такое излучение, конечно, свойственно не только электронам, а вообще любым зарядам,двигающимся криволинейно, но, как будет видно из дальнейшего, для тяжелых частиц (протонов и др.) оно в рассматриваемой области энергий ничтожно мало. С ростом энергии электронов доля излучаемой энергии резко увеличивается, и при энергии в 100—200 Мэв излучение начинает заметно влиять на движение электронов в ускорителях. На роль излучения электронов в циклических ускорителях впервые обратили внимание Д. Д. Иваненко и И. Я. Померанчук<sup>16</sup>.

В бетатроне в результате потерь электронами энергии на излучение радиус равновесной орбиты уменьшается и электроны начинают сворачивать на внутреннюю стенку ускорительной камеры. Это объясняется тем, что в бетатроне потери энергии не компенсируются. Поэтому бетатрон практически не пригоден для ускорения электронов до энергий свыше 300—400 Мэв \*)<sup>17</sup>.

В синхротроне ввиду наличия автофазировки положение совершенно иное. Как видно из формулы  $\omega_s = -\frac{ecB_s}{E_s}$  (см. (1,96)), выражающей связь частоты обращения синхронной частицы с ее энергией и полем на равновесной орбите, для поддержания резонанса (постоянства  $\omega_s$ ) относительный прирост энергии за оборот должен быть равен соответствующему относительному приросту магнитного поля

$$\frac{\Delta E_s}{E_s} = \frac{\Delta B_s}{B_s} \quad \text{или} \quad \Delta E_s = -\frac{2\pi ec}{\omega_s^2} \dot{B}_s. \quad (4,1)$$

При наличии излучения, очевидно, прирост энергии равновесной частицы за оборот определяется разностью между энергией, получаемой от электрического поля, и энергией, теряемой на излучение

$$\Delta E_s = eV_0 \cos \Phi_s - \Delta E_{\text{изл.}} \quad (4,2)$$

\*) Теоретически в бетатроне можно подобрать специальный режим изменения магнитного поля, при котором потери на излучение будут компенсироваться, но практически это будет являться лишь полумерой, так как несущественно отодвигает предел достижимой энергии электронов.

Так как  $\Delta E_s$  определяется только  $V_s$  (в синхротроне  $\Delta E_s$  практически постоянно), то, согласно (4,2), для компенсации возрастающих потерь на излучение, синхронная частица по мере ускорения должна получать от ускоряющей системы все больше и больше энергии.

В синхротроне такая компенсация осуществляется автоматически благодаря наличию автофазировки. Как уже отмечалось в § 2, автофазировка не нарушается при медленном изменении параметров. В данном случае таким параметром являются возрастающие потери энергии на излучение. Таким образом, благодаря наличию автофазировки в синхротроне электроны получают от ускоряющей системы ровно столько энергии, сколько необходимо, чтобы они могли вращаться с заданной постоянной частотой на данном радиусе. Эта столь замечательная особенность синхротрона как раз и способствовала его дальнейшему развитию. Именно, благодаря автоматической компенсации потерь энергии электронами на излучение в синхротроне удалось существенно увеличить достижимые энергии по сравнению с бетатроном.

Увеличение энергии, отдаваемой электронам ускоряющим полем, означает увеличение  $\cos \Phi_s$  и, следовательно, перемещение равновесной фазы  $\Phi_s$  к нулю и уменьшение области устойчивости. Последнее может привести к потерям частиц. Поэтому для обеспечения режима ускорения необходимо либо увеличивать амплитуду ускоряющего поля по некоторому закону, либо, что менее выгодно, выбирать ее с самого начала достаточно большой. О величине требуемых амплитуд ускоряющего поля в синхротронах на ультрарелятивистские энергии можно судить по следующему примеру. Если строить синхротрон на энергию в  $10 \text{ Бэв}$ , то в нем необходимо иметь в конце цикла ускорения  $V_0 > 30 \text{ млн. в}$ . Соответствующий прирост энергии за оборот можно, например, получить, если в качестве ускоряющей системы использовать ряд эндовибраторов или линейный ускоритель.

Но этим влияние излучения на движение электронов не ограничивается. В результате излучения электрон получает импульс отдачи, который можно трактовать как радиационное трение. Влияние этого трения сказывается как на радиально-фазовых <sup>10,14</sup>, так и на свободных <sup>18,19</sup> колебаниях, при определенных условиях приводя к их затуханию или раскачке.

В 1955 г. А. А. Соколов и И. М. Тернов <sup>20</sup> обратили внимание еще на одну сторону излучения — на его квантовый, дискретный характер. Дело в том, что в действительности излучение энергии электронами происходит не непрерывно, а в виде отдельных квантов, испускание которых можно считать мгновенным. Величины испущенных квантов и интервалы времени между последовательными испусканиями являются статистически независимыми величинами; каждая из этих величин распределена по закону Пуассона около некоторого среднего значения, зависящего от энергии электрона.

Так как в рассматриваемом явлении квантовые числа имеют типично классические величины (орбитальное квантовое число  $\sim 10^9$ ), то эту задачу можно рассматривать классически, учитывая, конечно, флуктуации излучения <sup>18</sup>.

Тогда энергию  $W_j$ , уносимую излучением в единицу времени, очевидно, можно записать в виде

$$W_j = \sum_j \varepsilon_j \delta(t - t_j), \quad (4,3)$$

где  $\varepsilon_j = \hbar \omega_j$  — энергия испущенного кванта в момент  $t_j$ , а  $\delta(t - t_j)$  — дельта-функция.

Флуктуации излучения приводят к возникновению внешней силы, которая статистически воздействует как на свободные, так и на фазовые колебания, т. е. ее воздействия случайны как по величине, так и по направлению. А. А. Коломенский и А. Н. Лебедев<sup>18,19</sup> показали, что последовательный учет как радиационного трения, так и флуктуационной внешней силы приводит, при определенных условиях, к независимому от энергии стационарному значению среднеквадратичной амплитуды вертикальных колебаний и к сравнительно медленному монотонному нарастанию амплитуд свободных и радиально-фазовых колебаний. Например, в гипотетическом синхротроне на энергию 10 *Бэв* установившаяся среднеквадратичная амплитуда радиальных колебаний в конце цикла ускорения была бы равна 30 *см*. Фазовые колебания в большинстве практических случаев также медленно, монотонно нарастают или могут достигать максимума<sup>21-25</sup>.

Из приведенных примеров видно, что последовательный учет влияния излучения на движение электронов в синхротронах совершенно необходимо, особенно в связи с проектированием и постройкой установок на энергию 1 — 5 *Бэв*.

При дальнейшем строгом описании влияния излучения на движение электронов мы будем следовать, в основном, результатам, полученным А. А. Коломенским и А. Н. Лебедевым<sup>18, 19, 21, 22</sup>. Рассмотрение будем вести для релятивистских электронов, т. е. при  $v \approx c$ .

Классический учет излучения приводит к следующей формуле\*) для энергии, которую излучает в единицу времени релятивистский электрон, двигаясь в однородном магнитном поле с постоянной энергией:

$$W = \frac{2ce^4 B_z^2 E^2}{3E_0^3} \quad (4,4)$$

Эта классическая формула справедлива во всех интересующих нас случаях (она верна при  $E < 10^{15}$  эв). Поэтому средняя величина квантового, флуктуационного излучения, определяемого формулой (4,3), очевидно, равна классической величине излучения, т. е.

$$\sum_j \epsilon_j \delta(t - t_j) = W. \quad (4,5)$$

Здесь усреднение производится по времени и по всему спектру.

Чтобы получить уравнения движения электронов с учетом излучения, введем в уравнения (3,1а), (3,1б) и (3,1в) обобщенную силу с компонентами  $P_r, P_\theta, P_z$ , выражающую реакцию излучения на движение электрона.  $P_r$  и  $P_z$  являются компонентами импульса отдачи, передаваемого электрону испущенными квантами в единицу времени соответственно в *r*-м и *z*-м направлениях, а  $P_\theta$  является моментом  $\theta$ -й компоненты передаваемого электрону в единицу времени импульса отдачи, взятым относительно оси *z*. Учитывая, что излучение электрона, описываемое формулой (4,4), имеет резко выраженную направленность по скорости с раствором конуса излучения  $\sim \frac{E_0}{E}$ , выражения для компонент силы

\*) См. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948 г., § 73.

\*\*) Законность последующего применения формулы (4,4) при рассмотрении движения электронов в неоднородном поле можно обосновать тем, что излучение на любом отрезке траектории определяется энергией электрона и полем на траектории.

МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$P_r = - \sum_j \frac{\varepsilon_j}{c} \delta(t-t_j) (\chi_{rj} + \gamma_{rj}), \quad (4,6)$$

$$P_\theta = -r \sum_j \frac{\varepsilon_j}{c} \delta(t-t_j), \quad (4,7)$$

$$P_z = - \sum_j \frac{\varepsilon_j}{c} \delta(t-t_j) (\chi_{zj} + \gamma_{zj}). \quad (4,8)$$

$\chi_{rj}$  и  $\chi_{zj}$  — углы испускания кванта относительно направления скорости соответственно в средней плоскости ( $z=0$ ) и в перпендикулярной плоскости, касательной к траектории электрона в точке испускания кванта;

$$\gamma_{rj} = \left. \frac{dr}{dl} \right|_j = \frac{1}{c} \left. \frac{dr}{dt} \right|_j, \quad \gamma_{zj} = \left. \frac{dz}{dl} \right|_j = \frac{1}{c} \left. \frac{dz}{dt} \right|_j \quad (4,9)$$

— углы между соответствующими проекциями траектории электрона и вектором  $\mathbf{i}_\theta$  ( $dl$  — элемент дуги мгновенной орбиты электрона). Согласно (4,5) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \varepsilon_j \delta(t-t_j) \gamma_{rj} &= W \frac{\dot{r}}{c}, \\ \sum_j \varepsilon_j \delta(t-t_j) \gamma_{zj} &= W \frac{\dot{z}}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (4,10)$$

Усреднение производится, так же как и в (4,5), по времени и по всему спектру. Используя (3,7б), легко приходим к уравнениям, отличающимся от (3,8а), (3,8б) и (3,8в) только членами  $P_r$ ,  $P_\theta$  и  $P_z$ . Так как в релятивистском случае  $\omega_s = \frac{c}{r_s}$  и, соответственно, в линейном приближении  $\dot{\theta} = \frac{c}{r}$ , то из (3,7б) легко получаем уравнение, связывающее  $r$  и  $\Phi$

$$\frac{\dot{\Phi}}{q\omega_s} = \frac{r-r_s}{r_s}. \quad (4,11)$$

Заметим, что уравнение (4,11) является фактически следствием четвертого уравнения движения (3,8г) для релятивистского случая.

Из (3,8б), учитывая  $P_\theta$  и (4,5), в нулевом приближении получаем

$$\frac{eV_0}{2\pi} \cos \Phi_s = \frac{r_s}{c} (\dot{E}_s + W_s) - \frac{e}{2\pi c} \dot{F}_s. \quad (4,12)$$

Это соотношение отражает, в частности, тот важный факт (о нем уже говорилось выше), что благодаря автофазировке средние потери энергии равновесной частицей на излучение автоматически компенсируются.

В первом приближении из уравнений (3,8а), (3,8б), (3,8в) и (4,11), учитывая члены  $P_r$ ,  $P_\theta$ ,  $P_z$ , определяемые (4,6), (4,7) и (4,8), а также соотношения (4,5) и (4,10), получаем линеаризованные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + \frac{\dot{E}_s + W_s}{E_s} \dot{\rho} + (1-n) \omega_s^2 \rho + \omega_s^2 r_s \left( \frac{\dot{\Phi}}{q\omega_s} - \frac{\rho}{r_s} \right) - \omega_s^2 r_s \frac{\Delta E}{E_s} = \\ = - \sum_j \frac{\varepsilon_j c}{E_{sj}} \delta(t-t_j) \chi_{rj}, \end{aligned} \quad (4,13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Delta E) - \dot{E}_s \left( \frac{\dot{\Phi}}{q\omega_s} - \frac{\rho}{r_s} \right) - E_s \left( \frac{\ddot{\Phi}}{q\omega_s} - \frac{\dot{\rho}}{r_s} \right) + \frac{W_s}{r_s} (1-2n) \rho + 2 \frac{W_s}{E_s} \Delta E = \\ = \frac{eV_0}{2\pi} \omega_s (\cos \Phi - \cos \Phi_s) - \left[ \sum_j \varepsilon_j \delta(t-t_j) - W \right], \end{aligned} \quad (4,14)$$

$$\ddot{z} + \frac{\dot{E}_s + W_s}{E_s} \dot{z} + n\omega_s^2 z = - \sum_j \frac{\varepsilon_j c}{E_{sj}} \delta(t - t_j) \chi_{zj}, \quad (4,15)$$

$$\frac{\dot{\Phi}}{q\omega_s} = \frac{\rho}{r_s}. \quad (4,16)$$

Рассмотрим вначале движение электрона по  $z$  (4,15). Используя метод вариации постоянных, получим общее решение уравнения (4,15):

$$z = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\dot{E}_s + W_s}{E_s} dt} (C_1 \sin \omega_s \sqrt{n} t + C_2 \cos \omega_s \sqrt{n} t) + \frac{c}{\omega_s \sqrt{n}} \sum_j e^{-\frac{1}{2} \int_{t_j}^t \frac{\dot{E}_s + W_s}{E_s} dt} \frac{\varepsilon_j}{E_{sj}} \chi_{zj} \sin [\omega_s \sqrt{n} (t - t_j)] \vartheta(t - t_j), \quad (4,17)$$

где  $\vartheta(t - t_j) = \int_{-\infty}^t \delta(t - t_j) dt$ , а  $C_1$  и  $C_2$  — константы, зависящие от начальных условий. Часть решения, зависящую от начальных условий, в связи с наличием значительного затухания, определяемого  $\dot{E}_s$  и  $W_s$ , в интересующей нас релятивистской области можно положить равной нулю. Следовательно, в релятивистской области  $z$ -движение электрона определяется только вторым членом, зависящим от внешней силы, которая обуславливается статистическим, случайным характером излучения и тем, что это излучение направлено не строго по направлению скорости электрона.

Как видно из (4,17),  $z$ -движение электронов в релятивистской области носит вероятностный характер, причем время затухания

$$\tau = \frac{E_s}{\dot{E}_s + W_s} \quad (4,18)$$

всегда меньше и даже много меньше времени ускорения. Поэтому для определения характера изменения амплитуд колебаний электронов по  $z$  в релятивистской области интерес представляет среднеквадратичная амплитуда установившихся колебаний, которая выражается формулой

$$\sqrt{a_{z \text{ уст}}^2} = \sqrt{\frac{13 \sqrt{3} r_s \Lambda}{24 n}}, \quad (4,19)$$

где  $\Lambda = \frac{\hbar}{m_0 c}$  — комptonовская длина волны. Здесь усреднение проводилось по спектру квантов излучения, их углам вылета  $\chi_z$  и фазам колебаний. Как видно, установившаяся среднеквадратичная амплитуда вертикальных колебаний не зависит от энергии. Это и понятно, так как с ростом энергии электронов, с одной стороны, растут импульсы отдачи и их число, с другой стороны, уменьшается угол  $\chi_z$  и увеличивается радиационное трение; эти явления взаимно компенсируют друг друга. Величина установившейся амплитуды очень мала (так, при  $r_s \approx 30 \text{ м}$ ,  $\sqrt{a_{z \text{ уст}}^2} \approx 10^{-8} \text{ см}$ ).

Качественно действие излучения на вертикальные колебания можно объяснить следующим образом. Испускаемые кванты уносят часть импульса электрона. Вертикальную компоненту уносимого импульса можно разбить на две составляющие, одну — пропорциональную вертикальной компоненте скорости и другую — пропорциональную  $\chi_z$ . Первая забирает энергию из колебательного движения электрона по вертикали.

Так [как эта энергия не компенсируется ускоряющим полем, которое компенсирует только средние потери импульса в азимутальном направлении, то это приводит к сильному затуханию колебаний. Вторая составляющая определяет силу, статистически действующую на электроны в вертикальном направлении и, следовательно, приводящую к росту колебаний пропорционально  $\sqrt{t}$ . Взаимодействие этих двух эффектов и дает описанное выше поведение амплитуд вертикальных свободных колебаний.

Перейдем теперь к рассмотрению движения в плоскости  $z=0$ . Оно описывается тремя уравнениями (4,13), (4,14) и (4,16) относительно трех переменных  $\rho$ ,  $\Delta E$  и  $\Phi$ . Приведем эти уравнения к одному уравнению 4-го порядка относительно  $\rho$ , причем будем рассматривать только отклонения  $\rho$ , соответствующие малым отклонениям  $\Phi$  от  $\Phi_s$  ( $\Phi = \Phi_s + \eta$ ,  $\cos \eta \approx 1$ ,  $\sin \eta \approx \eta$ ). В этих предположениях уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \rho^{IV} + \left( 2 \frac{\dot{E}_s}{E_s} + 3 \frac{W_s}{E_s} - 2 \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \rho'' + (1-n) \omega_s^2 \rho'' + \\ + (1-n) \omega_s^2 \left( \frac{\dot{E}_s}{E_s} - 2 \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{3-4n}{1-n} \frac{W_s}{E_s} \right) \rho' + (1-n) \omega_s^2 \Omega^2 \rho = \\ = - \frac{r_s \omega_s^2}{E_s} \frac{d}{dt} \left[ \sum_j \varepsilon_j \delta(t-t_j) - W \right], \quad (4,20) \end{aligned}$$

где  $\Omega = \omega_s \sqrt{\frac{qeV_0 \sin \Phi_s}{2\pi(1-n)E_s}}$  — частота малых фазовых колебаний. Здесь мы пренебрегаем малыми членами порядка  $\left(\frac{\dot{E}_s}{E_s}\right)^2$ ,  $\frac{W_s}{E_s}$  и т. п. и предполагаем, что относительное увеличение флуктуаций энергии излучения  $w(t) = \sum_j \varepsilon_j \delta(t-t_j) - W$  значительно больше относительного изменения  $V_0 \sin \Phi_s$ .

Решение однородной части уравнения (4,20) можно записать в виде суммы быстрых и медленных колебаний с меняющимися амплитудами

$$\rho_0 = C_B e^{\int \zeta_B dt} + C_M e^{\int \zeta_M dt} + \text{к. с.}, \quad (4,21)$$

где к. с. означает комплексносопряженную функцию; величины  $\zeta_B$  и  $\zeta_M$ , учитывая, что

$$\frac{\dot{E}_s + W_s}{E_s} \sim \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \ll \Omega \ll \omega_s, \quad (4,22)$$

определяются формулами

$$\zeta_B = i\omega_s \sqrt{1-n} - \frac{i}{2} \left( \frac{\dot{E}_s}{E_s} + \frac{n}{1-n} \frac{W_s}{E_s} \right), \quad (4,23)$$

$$\zeta_M = i\Omega - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{E}_s}{E_s} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + \frac{3-4n}{1-n} \frac{W_s}{E_s} \right); \quad (4,24)$$

$C_B$ ,  $C_B^*$  и  $C_M$ ,  $C_M^*$  — константы, определяемые начальными условиями. Из (4,13) и (4,16) теперь легко получить соответствующие решения для  $\Delta E$  и  $\eta$ .

Как видно из (4,21), (4,23) и (4,24), колебания  $\rho$ ,  $\Delta E$  и  $\eta$ , описываемые однородными уравнениями, испытывают, кроме обычного адиабатического затухания, зависящего от  $E_s$  и  $\dot{\Omega}$ , также очень сильное затухание или раскачку, определяемые радиационным трением, действие которого существенно зависит от  $n$ . Так, для быстрых колебаний (выражение (4,23)) оно приводит к затуханию только при  $0 < n < 1$ , что как раз соответствует устойчивой области в синхротронах со слабой фокусировкой. В ускорителях с сильной фокусировкой (о сильной фокусировке будет говориться ниже), где  $|n| \gg 1$ , очевидно, радиационное трение будет приводить к раскачке быстрых колебаний. На это впервые обратили внимание Коломенский и Лебедев; они же предложили некоторые методы устранения этой раскачки <sup>26</sup>.

Закон затухания, определяемый (4,21) и (4,23), объясняется действием нескольких факторов. С одной стороны, на быстрое (свободное) радиальное движение электронов, как и в случае вертикального движения, действует сила радиационного трения, пропорциональная  $\dot{\rho}$ . С другой стороны, величина излучаемой электроном энергии зависит от фазы колебания электрона. Действительно, в каждой точке траектории электрона его движение можно считать совершающимся по дуге окружности. Радиус этой окружности и поле на ней, очевидно, совпадают с радиусом и полем в рассматриваемой точке траектории. В соответствии с (4,4), величина энергии, излучаемой электроном в данном месте, пропорциональна  $rB_z^2$  ( $B_z \sim r^{-n}$ ), т. е. определяется только кривизной траектории и полем на ней (зависимость излучения от изменения энергии электрона здесь следует пренебречь). Поэтому разность энергий, теряемых на излучение колеблющимся электроном и электроном, движущимся по мгновенной орбите, пропорциональна  $(1-2n)Wr$ . Это приводит к тому, что орбита, относительно которой электрон совершает колебания (точка подвеса эквивалентного маятника), уже не совпадает с мгновенной орбитой, а быстро колеблется около нее со скоростью, как раз пропорциональной  $(1-2n)Wr$ . Учет отмеченных явлений (радиационного трения и колебания электронов относительно колеблющегося положения равновесия) и приводит к полученному выше строгим путем закону затухания быстрых радиальных колебаний.

Медленные колебания в слабофокусирующих синхротронах затухают только при  $n < \frac{3}{4}$ . При  $\frac{3}{4} < n < 1$  радиационное трение приводит к раскачке медленных колебаний, а при  $n > 1$  радиальное движение вообще неустойчиво. Такую зависимость действия радиационного трения на медленные радиально-фазовые колебания можно объяснить следующим образом. Согласно формуле (4,4) энергия, излучаемая электроном за один оборот, пропорциональна  $rB_z^2E^2$  ( $E \sim B_z r$ ). Следовательно, отношение энергии излучения неравновесной частицы к энергии излучения равновесной частицы равно  $\left(\frac{r}{r_s}\right)^{3-4n}$ . Как уже указывалось, ускоряющее поле компенсирует только потери энергии, равные излучению равновесной частицы. При  $3-4n > 0$  излучение будет превышать компенсацию при радиусах, больших  $r_s$ , и, следовательно, будет приводить к уменьшению  $r$ ; при  $r < r_s$ , наоборот, компенсация будет превышать излучение и  $r$  будет увеличиваться. При  $3-4n < 0$  положение будет обратное. Поэтому только при  $n < \frac{3}{4}$  излучение приводит к затуханию медленных колебаний.

Рассмотрим теперь, что дает внешняя сила в уравнении (4,20) при  $0 < n < \frac{3}{4}$ . Решение неоднородного уравнения, соответствующее нулевым

начальным условиям \*), имеет вид

$$\rho(t) = -\frac{r_s}{2(1-n)} \left\{ \int_0^t e^{x} \int_0^x \zeta_B dy \frac{\omega(x)}{E_s(x)} dx + \int_0^t e^{x} \int_0^x \zeta_M dy \frac{\omega(x)}{E_s(x)} dx + \text{н. с.} \right\}. \quad (4,25)$$

Здесь, так же как и при рассмотрении вертикальных колебаний, целесообразно рассматривать в основном установившиеся процессы, так как

$$\tau_B = \frac{E_s}{\dot{E}_s + \frac{n}{1-n} W_s} \quad \text{и} \quad \tau_M = \frac{E_s}{\dot{E}_s - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} E_s + \frac{3-4n}{1-n} W_s} \quad (4,26)$$

всегда меньше и много меньше времени ускорения. Выражение для среднеквадратичной амплитуды установившихся суммарных (быстрых и медленных) радиальных колебаний имеет вид:

$$\sqrt{a_{\eta}^2 \text{уст}} = \sqrt{\frac{55 \sqrt{3} \Lambda r_s}{16n(3-4n)} \cdot \frac{E_s}{E_0}} \quad \text{при} \quad 0 < n < \frac{3}{4}. \quad (4,27)$$

Из выражения (4,27) видно, что установившиеся радиальные колебания линейно растут с энергией и достигают максимального значения в конце ускорения и что вынужденные колебания также имеют определенную область устойчивости  $0 < n < 3/4$ .

В случае сильной фокусировки зависимость среднеквадратичной амплитуды установившихся медленных радиальных колебаний от энергии также линейная, но только коэффициент оказывается значительно меньшим<sup>27</sup>.

Для установившихся медленных фазовых колебаний среднеквадратичная амплитуда определяется формулой

$$\sqrt{a_{\eta}^2 \text{уст}} = \sqrt{\frac{55 \sqrt{3} \Lambda q \text{ctg} \Phi_s E_0}{32 r_e (3-4n) E_s} G_1 G_2} \quad \text{при} \quad n < \frac{3}{4}, \quad (4,28)$$

где  $G_1 = \left[ 1 + \frac{1-n}{3-4n} \left( \frac{\dot{E}_s}{W_s} + \frac{E_s \dot{\Omega}}{W_s \Omega} \right) \right]^{-1}$ ,  $G_2 = \left( 1 + \frac{\dot{E}_s}{W_s} \right)^{-1}$ ,  $r_e = \frac{e^2}{m_0 c^2}$  — классический радиус электрона.

Множитель  $G_1 G_2$  учитывает наличие адиабатического затухания и в сущности определяет зависимость  $a_{\eta}^2 \text{уст}$  от энергии в начале релятивистской области. В ультрарелятивистской области этот множитель обращается в 1; в существенно нерелятивистской области он равен нулю. Учет адиабатического затухания фазовых колебаний проделан в работах<sup>21-25</sup>. Анализ выражения (4,28) показывает, что во всех практических случаях установившаяся амплитуда монотонно возрастает с энергией и достигает максимума в конце ускорения. При постоянстве  $\text{ctg} \Phi_s$ , что соответствует росту  $V_0$  пропорционально росту излучения, максимальное значение установившейся амплитуды может достигаться раньше. Как показали Е. М. Мороз и М. С. Рабинович<sup>23, 24</sup>, из формулы (4,28) вытекает также ограничение, налагаемое на кратность ускоряющего высокочастотного поля  $q$ . Действительно, среднеквадратичная амплитуда установившихся фазовых колебаний пропорциональна  $\sqrt{q}$ , а размеры сепаратрисы, очевидно, обратно пропорциональны  $q$ .

\*) Начальные условия действительно можно считать нулевыми, так как к тому времени, когда начинает сказываться действие внешней силы, колебания, определяемые начальными условиями (4,21), (4,23) и (4,24), успеют существенно затухнуть.

Отсюда ясно, что при некотором  $q$  при прочих равных условиях амплитуда установившихся колебаний сравняется с размерами сепаратрисы, что приведет к большим потерям частиц. Анализируя аналогичную формулу<sup>27</sup> в случае сильной фокусировки, видим, что ограничения на кратность значительно более мягкие.

Среднеквадратичные амплитуды установившихся колебаний характеризуют распределение электронов по амплитудам колебаний. Используя полученные результаты (4,27) и решая задачу, аналогичную задаче о рассеянии частиц на остаточном газе\*), нетрудно оценить потери электронов на вертикальных стенках из-за раскачки радиальных колебаний. Таким же образом решается задача о потерях электронов при выходе из области устойчивости из-за раскачки фазовых колебаний. Критерием практического отсутствия потерь можно считать малость среднеквадратичной амплитуды установившихся колебаний по сравнению с соответствующим характерным размером. Для радиальных колебаний таким размером является радиальная апертура ускорительной камеры, а для фазовых колебаний — фазовый размер области устойчивости.

Проведенное выше рассмотрение влияния излучения на движение электронов в синхротроне позволяет сделать следующие важные выводы:

1. Чтобы в синхротронах благодаря автофазировке потери энергии электронов на излучение могли компенсироваться, необходимо обеспечивать высокую разность потенциалов ускоряющего поля (при  $E_{\max} = 1 \text{ Бэв}$   $V_{0 \max} > 30 \text{ кэ}$ , а при  $E_{\max} = 5 \text{ Бэв}$   $V_{0 \max} > 4 \text{ млн. в}$ ).

2. Следует считаться с тем, что при больших энергиях электронов монотонный рост амплитуды радиальных колебаний может привести к потерям частиц на вертикальных стенках ускорительной камеры (при  $E_{\max} = 1 \text{ Бэв}$   $\sqrt{a_{\text{уст}}^2} \approx 1 \text{ см}$ , а при  $E_{\max} = 5 \text{ Бэв}$   $\sqrt{a_{\text{уст}}^2} \approx 10 \text{ см}$ ).

3. Излучение приводит к ограничению возможной кратности ускоряющего высокочастотного поля.

4. В ускорителях электронов с сильной фокусировкой необходимо принимать специальные меры, чтобы избежать значительной раскачки свободных радиальных колебаний.

## Б. Фазотрон

Фазотрон, являясь циклическим резонансным ускорителем тяжелых частиц, принципиально отличается от циклотрона лишь тем, что в нем частота ускоряющего поля меняется в процессе ускорения. Существенные автофазировки за счет изменения частоты позволяют существенно увеличить энергию тяжелых частиц, но в то же время ведет к импульсной работе фазотрона, что, конечно, сильно снижает интенсивность пучков ускоренных частиц по сравнению с циклотроном.

Магнитное поле в фазотроне близко к однородному. Однако, в отличие от циклотрона, магнитное поле в фазотроне благодаря наличию автофазировки можно сделать сильнее спадающим к краям электромагнита (на 3 ÷ 5%) и тем самым обеспечить достаточно хорошую вертикальную фокусировку частиц. Закон изменения поля выбирают таким, чтобы показатель спада поля  $n$ , обычно меняющийся по радиусу, был меньше 0,2. При  $n = 0,2$  наблюдался бы нелинейный резонанс связи (см. § 3) между вертикальными и радиальными колебаниями, который мог бы привести к потерям частиц на горизонтальных стенках камеры.

\*) См., например, перевод статьи Блахмана и Куранта «Рассеяние частиц на газе в синхротроне» в журнале «Проблемы современной физики», II, 75 (1952).

Автофазирующие свойства фазотрона описываются уравнением (3,17а). При кратности  $q=1$  и для двух ускоряющих промежутков\*) оно принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{K_s \omega_s^2} \frac{d\Phi}{dt} \right) - \frac{eV_0}{\pi} \cos \Phi = - \frac{eV_0}{\pi} \cos \Phi_s, \quad (4,29)$$

где  $V_0$  — амплитуда ускоряющего напряжения на каждом из ускоряющих промежутков, а  $K_s$  по-прежнему равно

$$K_s = 1 + \frac{n}{1-n} \frac{1}{\beta_s^2}.$$

Выражение для равновесной фазы  $\Phi_s$  получим из (3,12), если положим  $\frac{\partial B_s}{\partial t} = 0$  и вместо  $V_0$  подставим суммарную амплитуду ускоряющего напряжения на обоих промежутках  $2V_0$ :

$$\cos \Phi_s = - \frac{\pi E_s}{V_0 K_s \omega_s^2} \frac{d\omega_s}{dt} = \frac{\pi c B_s \omega_s}{\omega_s^2 V_0 K_s}. \quad (4,30)$$

Как уже отмечалось в § 3, из фазового уравнения легко определить размеры области устойчивости на фазовой плоскости ( $\Phi, \dot{\Phi}$ ). Область устойчивости в начальный момент характеризует эффективность захвата частиц в режим ускорения: захватываются только те частицы, начальные значения для которых  $\Phi_i$  и  $\dot{\Phi}_i$  лежат внутри указанной области. Это является общим положением для всех автофазирующих ускорителей. Однако в фазотроне захват частиц в режим ускорения обладает рядом специфических особенностей, что связано с расположением инжектора в центре магнита. Впервые этот вопрос теоретически был исследован Бомом и Фолди<sup>15</sup>.

Прежде всего следует отметить, что фазовое уравнение (4,29) при таком расположении инжектора несправедливо для нескольких первых оборотов. Это связано, во-первых, с тем, что на первых оборотах траектории частиц целиком лежат внутри ускоряющего промежутка и энергия, получаемая частицей за поворот, не равна  $eV_0 \cos \Phi$ , где  $\Phi$  — фаза ускоряющего напряжения в момент прохождения середины ускоряющего промежутка. Во-вторых, траектории частиц в этом случае будут очень сильно отличаться от круговых, и наше приближение, в котором движение описывается относительно круговой орбиты, становится несправедливым. В связи с этим поведение частиц при выходе из инжектора нужно рассматривать особо. Анализ начального движения показал<sup>15</sup>, что после нескольких первых оборотов, когда становится справедливым фазовое уравнение (4,29), фаза прохождения середины ускоряющего промежутка близка к  $\Phi = 0$ . Поэтому при рассмотрении вопроса о захвате частиц в режим ускорения примем  $\Phi_i = 0$ .

Поскольку входная фаза частицы равна нулю, частица некоторое время обязательно будет получать энергию от ускоряющего поля, а радиус ее орбиты будет непрерывно увеличиваться. При определенных условиях в результате фазового движения фаза частицы может оказаться больше  $\pi/2$ . Это означает, что частица попала в замедляющее поле и, следовательно, ее энергия и радиус уменьшаются. Если при этом части-

\*) В фазотроне, так же как и в циклотроне, ускоряющими электродами служат дуанты (см., например, сборник «Циклотрон», Гостехиздат, 1948 г.). Правда, в фазотроне для упрощения конструкции обычно ограничиваются одним дуантом, а роль второго дуанта выполняет вакуумная камера или специальная рамка.

ца потеряет всю накопленную энергию, то она вернется в центр камеры и выйдет из режима ускорения. Если же частица не вернется к центру камеры во время первого периода фазового колебания, то она не вернется к нему и в последующие периоды. Действительно, совершив фазовое колебание, частица получит энергию  $NeV_0 \cos \Phi_s$ , где  $N$  — число полуоборотов за период фазового колебания, и радиус ее равновесной орбиты увеличится. При каждом последующем колебании равновесный радиус становится больше, чем при предыдущем, и частица все дальше отходит от центра камеры.

Таким образом, решающим для захвата частиц является первое фазовое колебание. Чтобы частицы были захвачены в режим ускорения, необходимо выполнение следующих двух условий:

- 1) начальные условия  $\Phi_i$  и  $\dot{\Phi}_i$  соответствуют области устойчивости;
- 2) за первое фазовое колебание частица не возвращается к центру камеры.

Проанализируем сначала условие 1). Поскольку нас интересует первое фазовое колебание, когда движение частиц происходит вблизи центра камеры, можно сделать ряд упрощающих допущений.

Приближенно можно считать, что магнитное поле в центральной части камеры меняется с радиусом по квадратичному закону

$$B = B_0 \left( 1 - \frac{hr^2}{2} \right).$$

Отсюда следует, что показатель спада магнитного поля

$$n \approx hr^2$$

мал вблизи центра и, стало быть,

$$K_s = 1 + \frac{hc^2}{\omega_s^2}.$$

Кроме того, можно положить  $E_s = E_0$ , а частоту ускоряющего напряжения  $\omega = \omega_s$  за время фазового колебания можно считать постоянной. При этих предположениях уравнение (4,29) запишется в виде

$$\frac{E_0}{\omega_s^2 + hc^2} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \frac{eV_0}{\pi} \cos \Phi = - \frac{eV_0}{\pi} \cos \Phi_s. \quad (4,31)$$

Из первого интеграла уравнения (4,31) найдем следующее выражение для максимально допустимых начальных  $\dot{\Phi}_i$  при  $\Phi_i = 0$

$$\dot{\Phi}_{\max} = (\dot{\Phi}_i)_{\max} = \sqrt{\frac{2eV_0}{\pi E_0} (\omega_s^2 + hc^2) F(\Phi_s)}, \quad (4,32)$$

где

$$F(\Phi_s) = \pm \sqrt{\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s}.$$

Для того чтобы частица попала в область устойчивости,  $\dot{\Phi}_i$  должно лежать в пределах

$$-\dot{\Phi}_{\max} < \dot{\Phi}_i < +\dot{\Phi}_{\max}. \quad (4,33)$$

Так как частота обращения частиц в центре камеры практически постоянна ( $\dot{\theta} = -\frac{E_0}{ecB}$ ), а частота ускоряющего напряжения  $\omega = \omega_s$  меняется со временем, то ионы, испущенные в разные моменты времени, будут иметь

различные  $\Phi_i$ . Действительно, согласно (3,76) при  $q=1$  имеем:

$$\dot{\Phi}_i = \omega_s - \dot{\theta} \quad \text{или} \quad \Delta\dot{\Phi}_i = \frac{d\omega_s}{dt} \Delta t.$$

Отсюда, полагая  $\Delta\dot{\Phi}_i = 2|\dot{\Phi}_i|_{\max}$ , найдем время, в течение которого выполняется условие (4,33)

$$\tau = \frac{2|\dot{\Phi}_i|_{\max}}{\frac{d\omega_s}{dt}} = \frac{2}{\frac{d\omega_s}{dt}} \sqrt{\frac{2eV_0(\omega_s^2 + hc^2)}{\pi E_0}} |F(\Phi_s)|, \quad (4,34)$$

где  $\frac{d\omega_s}{dt}$  — скорость изменения частоты ускоряющего напряжения. При

заданных  $V_0$ ,  $\omega_s$ ,  $E_0$ ,  $h$  максимально допустимые значения  $\Phi_i$ , а значит, и  $\tau$  целиком определяются функцией  $F(\Phi_s)$ . На рис. 7 представлен график этой функции (кривая I) в зависимости от  $\cos \Phi_s$ . Из этого графика видно, что по мере уменьшения  $\Phi_s$

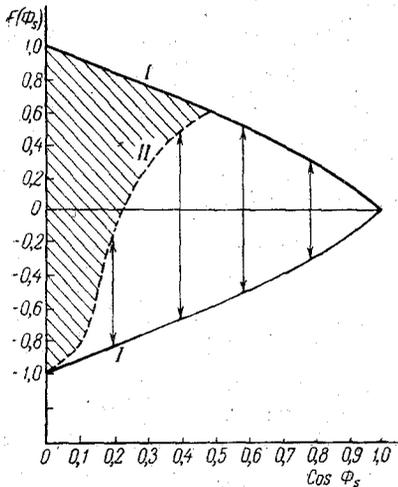


Рис. 7. Область начальных значений  $\Phi_i$ , удовлетворяющих условиям захвата 1) и 2) (незаштрихованная часть).

та  $\Phi_s$  для частицы, находящейся на границе области устойчивости, соответствует  $\pi/2$ . Дальнейшее увеличение  $\Phi_s$  приводит к тому, что часть частиц при своем фазовом движении начинает заходить в область замедляющего поля. При определенном  $\Phi_s > \bar{\Phi}_s$  некоторая доля частиц начнет возвращаться к центру камеры, причем чем ближе  $\Phi_s$  к  $\pi/2$ , тем эта доля становится больше.

Учет условия 2) производится с помощью численного интегрирования. Кривая, отсекающая начальные значения, при которых частицы возвращаются к инжектору, нанесена на том же рис. 7 (кривая II). Начальные условия для частиц, незахватывающихся в режим ускорения, лежат выше этой кривой. Так как с увеличением  $\Phi_s$ , с одной стороны, растет область устойчивости, а, с другой стороны, с некоторого значения  $\Phi_s > \bar{\Phi}_s$  начинает резко расти доля частиц, возвращающихся к инжектору, то при определенном  $\Phi_s$  следует ожидать оптимальных условий за-

область допустимых  $\Phi_i$  увеличивается. Все частицы, начальные условия для которых лежат внутри этой кривой, попадают в область устойчивости.

Однако для дальнейшего беспрепятственного ускорения недостаточно, чтобы начальные условия соответствовали области устойчивости; необходимо также потребовать выполнения условия 2), учет которого приводит к уменьшению области допустимых  $\Phi_i$ .

Проанализируем это условие. Если  $\Phi_s$  близко к нулю, то ни одна частица, захваченная в область устойчивости, не будет заходить в замедляющее поле и, следовательно, ни одна из них не вернется в центр камеры. Такая ситуация будет сохраняться при увеличении  $\Phi_s$  до некоторого значения  $\Phi_s = \bar{\Phi}_s$ , определяемого тем, что правая точка поворо-

хвата. Из рис. 7 видно, что область начальных условий, при которых частицы захватываются в фазотронный режим, максимальна для  $\Phi_s \approx 60^\circ$ . При  $\Phi_s$ , меньших  $60^\circ$ , эта область уменьшается из-за уменьшения устойчивой области, а при  $\Phi_s$ , больших  $60^\circ$ , — благодаря увеличению числа частиц, возвращающихся к инжектору. Время захвата  $\tau$  при учете обоих условий 1) и 2) будет определяться формулой

$$\tau = \frac{2}{d\omega_s} \sqrt{\frac{2eV_0(\omega_s^2 + hc^2)}{\pi E_0}} L(\Phi_s). \quad (4,35)$$

где  $L(\Phi_s)$  учитывает влияние обоих факторов. Функцию  $L(\Phi_s)$  [легко построить на основе графика рис. 7. Откладывая по оси ординат отрезки, равные полуширине области, удовлетворяющей одновременно обоим условиям (стрелки на рис. 7), а по оси абсцисс соответствующие значения  $\cos \Phi_s$ , получим зависимость  $L(\Phi_s)$  от  $\cos \Phi_s$  (рис. 8). При заданных  $V_0$ ,  $\omega_s$ ,  $h$ ,  $E_0$  время инжекции целиком определяется величиной  $L(\Phi_s)$ .

Зная время инжекции и частоту циклов ускорения  $f$ , легко определить ток частиц на выходе из фазотрона

$$I = I_0 \tau f, \quad (4,36)$$

где  $I_0$  — ток из инжектора.

Отношение тока на выходе из ускорителя к току на входе в него называют эффективностью данной установки  $\varepsilon$ . Согласно (4,36) и (4,35) эффективность фазотрона определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{2f}{d\omega_s} \sqrt{\frac{2eV_0(\omega_s^2 + hc^2)}{\pi E_0}} L(\Phi_s); \quad (4,37)$$

$\frac{f}{d\omega_s}$  для данного ускорителя — величина постоянная. Поэтому при заданном  $V_0$  максимальное значение  $\varepsilon$  совпадает с максимумом  $L(\Phi_s)$  и достигается при  $\cos \Phi_s \cong 0,5$ . Экспериментальные данные, полученные на фазотронах, хорошо согласуются с теоретическими результатами<sup>28</sup>. Кроме того, из экспериментов следует, что некоторая доля частиц может ускоряться при значении амплитуды ускоряющего напряжения, меньшей необходимой для резонансного ускорения. Интенсивность потока ионов, ускоренных таким образом, составляет 5—10% от величины тока при оптимальных условиях работы фазотрона. Такой эффект нельзя объяснить в рамках обычной теории. В данном случае мы имеем дело с проявлением стохастического режима ускорения<sup>29</sup>. Сущность этого режима состоит в следующем: частицы, вращаясь в постоянном магнитном поле, проходят ряд ускоряющих промежутков, испытывая то ускорение, то замедление различное число раз. При этом движение частиц аналогично тому, которое совершают броуновские частицы в жидкости, двигаясь от одной стенки сосуда до другой. Полная вероятность  $\omega_k$  достижения частицей некоторой энергии  $E_k$ , где  $k$  — число проходов ускоряющих промежутков, при некоторых предположениях<sup>29</sup> выражается

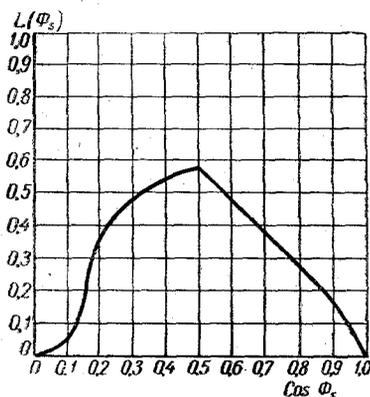


Рис. 8. График функции  $L(\Phi_s)$ , определяющей эффективность захвата частиц в режим ускорения в фазотроне при постоянной амплитуде ускоряющего напряжения.

формулой

$$\omega_h = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \frac{eV_0}{E_h} \quad (4,38)$$

Эта вероятность определяет долю частиц, достигших энергии  $E_h$ . Экспериментальные данные<sup>28</sup> согласуются с этой формулой.

После того, как частицы, захваченные в режим ускорения, достигнут конечного радиуса, естественно возникает проблема их вывода из камеры ускорителя. Эта проблема в фазотронах на большие энергии является довольно сложной. Дело в том, что в отличие от циклотрона в фазотроне на большие энергии относительный прирост энергии за оборот и, следовательно, шаг спирали очень малы (обычно шаг спирали при больших энергиях составляет сотые доли миллиметра). Поэтому применявшиеся вначале методы вывода (рассеивающая мишень, электростатический дефлектор) давали весьма малую эффективность от 0,01% до 0,5%.

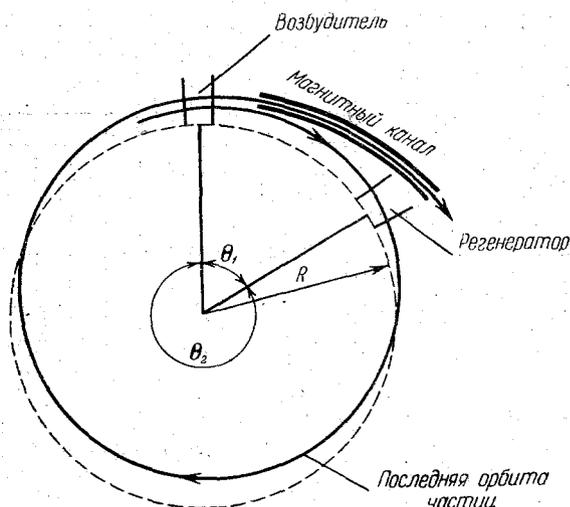


Рис. 9. Схема вывода частиц из фазотрона.

В 1951 г. Тук и Тенг<sup>30</sup> предложили новый метод вывода ускоренных частиц из фазотрона, заключающийся в следующем. В районе последних орбит на разных азимутах создаются две локальные неоднородности магнитного поля разного знака и нарастающие по радиусу. Это приводит к нарастающему возмущению движения частиц на этих радиусах, так что на некотором азимуте резко увеличивается шаг траекторий частиц. Помещая на этом азимуте начало магнитного канала, выводят частицы наружу.

Остановимся на этом методе более подробно. Рассматривая движение частиц в средней плоскости, введем координату  $\rho = r - R$ , где  $R$  — радиус, имеющий следующий смысл: при  $r > R$  имеются неоднородности магнитного поля, о которых говорилось выше, а при  $r < R$  неоднородности отсутствуют. На некотором азимуте, скажем, на нулевом, начиная с радиуса  $R$ , создается быстро спадающее по радиусу поле — так называемый возбудитель, а на некотором другом азимуте быстро нарастающее поле — регенератор (см. рис. 9). Азимутальные размеры этих неоднородностей поля делаются малыми. Поэтому можно считать, что проходящая через неоднородность частица не будет претерпевать заметного отклонения по радиусу, а получит лишь отклонение на некоторый угол от направления, по которому она двигалась бы, если бы этих возмущений не было. Возмущения, обусловленные неоднородностями, можно записать в виде

$$\Delta \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right) = S\rho \quad \text{для возбудителя} \quad (4,39)$$

и

$$\Delta \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right) = -T\rho \quad \text{для регенератора,} \quad (4,40)$$

где

$$S = -\frac{r_s}{B_s} \left( \frac{dB}{dr} \right)_{\text{воз}} \theta_{\text{воз}} \quad \text{и} \quad T = \frac{r_s}{B_s} \left( \frac{dB}{dr} \right)_{\text{рег}} \theta_{\text{рег}}; \quad (4,41)$$

$\theta_{\text{воз}}$  и  $\theta_{\text{рег}}$  — азимутальные протяженности возбудителя и регенератора. Отсюда легко можно записать в матричной форме результат воздействия всего поля вместе с возмущениями после одного оборота. Например, для азимута выхода из возбудителя получим

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho' \end{pmatrix}_{m+1} = A \begin{pmatrix} \rho \\ \rho' \end{pmatrix}_m, \quad (4,42)$$

где  $m$  — номер прохождения через систему возмущений,  $A = FQDP$  — матрица полного оборота,  $F$  и  $D$  соответственно матрицы перехода от возбудителя к регенератору и от регенератора к возбудителю, а  $Q$  и  $P$  соответственно матрицы прохождения через регенератор и возбудитель:

$$F = \begin{pmatrix} \cos \chi \theta_1 & \frac{1}{\chi} \sin \chi \theta_1 \\ -\chi \sin \chi \theta_1 & \cos \chi \theta_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos \chi \theta_2 & \frac{1}{\chi} \sin \chi \theta_2 \\ -\chi \sin \chi \theta_2 & \cos \chi \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (4,43)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{pmatrix},$$

$\theta_1$  — угловое расстояние между возбудителем и регенератором,  $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$  (см. рис. 9),  $\chi = \sqrt{1-n}$ .

В результате несложных вычислений, предполагая, что  $\theta_1$  меньше  $\pi/2$ , получим следующую приближенную формулу, описывающую движение частиц в области между возбудителем и регенератором после многих прохождений,

$$\rho = Ce^{m\Pi} \sin(\phi + \chi\theta), \quad (4,44)$$

где  $\phi$  и  $\Pi$  определяются возмущениями и геометрией, а  $C$  — определяется начальными условиями. Как видно из этой формулы, траектории при последовательных прохождениях подобны, а их шаг быстро возрастает. Строгий анализ решения на полном обороте показывает, что форма траекторий мало меняется при последовательных прохождениях и что они смещаются с нарастающей скоростью по радиусу, причем максимум отклонения находится между возбудителем и регенератором, где и помещают магнитный канал. Теория этого метода вывода была разработана К. Ле Кутером<sup>31</sup> и В. П. Дмитриевским<sup>32</sup>.

Описанный результат можно объяснить с двух точек зрения. С одной стороны, свободные радиальные колебания, имея частоту, очень близкую к частоте обращения, будут испытывать резонансную раскачку под действием возбудителя и регенератора, что и должно привести к полученному выше результату. С другой стороны, известно, что возмущение в магнитном поле, близком к однородному, приводит к прецессии орбит. Два возмущения различных знаков могут дать при соответствующем подборе их величин прецессию центра траекторий по радиусу, что также соответствует полученному результату.

Мы здесь не касались влияния возмущений на вертикальное движение частиц, но, как показывают расчеты и эксперимент, нетрудно подобрать параметры возбудителя и регенератора, при которых, с одной стороны, можно получить в небольшой области по радиусу достаточно большие последние шаги траекторий (3—4 см), с другой же стороны, сохранить устойчивость движения по вертикали.

Осуществление этого метода вывода в фазотроне Объединенного института ядерных исследований позволило вывести из камеры около 5–6% ускоренного пучка частиц с энергией 680  $Mэв$ <sup>33</sup>, а на Ливерпульском фазотроне ~3% с энергией 400  $Mэв$ <sup>34, 35</sup>.

Несмотря на сравнительно большую эффективность фазотронов и на принципиальную возможность получать на них любые энергии, строить фазотроны на энергии протонов свыше 1  $Bэв$  нерационально, так как при таких энергиях стоимость подобных установок, имеющих сплошной магнит, растет приблизительно как куб максимальной энергии. Для получения протонов больших энергий, как уже указывалось, экономически более выгоден синхрофазотрон, в котором, в отличие от фазотрона, используется кольцевой магнит.

### В. Синхрофазотрон

Синхрофазотрон является самым современным ускорителем тяжелых частиц, в котором явление автофазировки используется наиболее эффективно. В нем сочетаются особенности синхротрона и фазотрона, что позволяет существенно повысить энергии частиц, получаемых в лабораторных условиях. Одновременное изменение частоты ускоряющего напряжения и магнитного поля дает возможность поддерживать радиус равновесной орбиты постоянным и, следовательно, использовать при ускорении тяжелых частиц, как и в синхротроне, кольцевой магнит.

Значительное продвижение вверх по шкале энергий далось, однако, дорогой ценой. Синхрофазотроны характерны тем, что к параметрам этих установок предъявляются весьма высокие требования. Это обусловлено трудностями обеспечения устойчивого движения частиц в сравнительно узкой кольцевой камере ускорителя при больших размерах установки, сложностью поддержания необходимого соответствия между частотой ускоряющего электрического напряжения и магнитным полем, необходимостью инжектировать частицы в камеру синхрофазотрона извне при сравнительно больших энергиях. Синхрофазотроны — очень сложные инженерные сооружения, в которых гигантские размеры сочетаются с высокими точностями изготовления отдельных узлов и с жесткими допусками на различные параметры.

Кольцевые магниты наиболее мощных синхрофазотронов разбиваются прямолинейными промежутками на четыре квадранта. Магнитное поле в промежутках отсутствует; они предназначены для размещения вводного и выводного устройств, а также ускоряющих электродов. Такая конструкция магнита ухудшает, в частности, его механическую жесткость и, следовательно, создает больше возможностей для различных искажений магнитного поля.

Чтобы дать некоторые представления об этих установках, приведем основные параметры четырех крупнейших синхрофазотронов (см. табл. I). Сооружение таких ускорителей требует создания детальной и точной теории, которая могла бы служить для их проектирования и запуска. В Советском Союзе теория синхрофазотрона была разработана в ФИАН СССР в 1948—1952 гг.<sup>36, 37, 38</sup>

На базе этой теории был спроектирован и сооружен самый мощный ускоритель — синхрофазотрон ОИЯИ на энергию 10  $Bэв$ . Принципиальная схема этой установки приведена на рис. 10. В дальнейшем особенности подобных ускорителей мы будем рассматривать на примере синхрофазотрона ОИЯИ.

Как уже отмечалось, в синхрофазотроне изменение частоты ускоряющего напряжения однозначно связано с изменением магнитного поля.

Таблица I

№№ п/п		Синхрофазотрон Бирмингемского университета (Англия)	Космотрон Брукхейвенской национальной лаборатории (США)	Беватрон Берклевского университета (США)	Синхрофазотрон Объединенного института ядерных исследований (СССР)
1	Максимальная энергия ускоряемых протонов . . . . .	1 <i>Бэв</i>	3 <i>Бэв</i>	6,2 <i>Бэв</i>	10 <i>Бэв</i>
2	Радиус кривизны орбиты . . . . .	4,5 м	9 м	15 м	28 м
3	Максимальное магнитное поле на орбите . . . . .	12 500 <i>эрстед</i>	14 000 <i>эрстед</i>	14 500 <i>эрстед</i>	13 000 <i>эрстед</i>
4	Длина прямолинейных промежутков . . . . .	отсутствуют	3,3 м	6 м	8 м
5	Апертура магнитного зазора . . . . .	21×50 см	23,8×91,5 см	30×120 см	40×200 см
6	Периметр орбиты . . . . .	28 м	70 м	115 м	207 м
7	Энергия инжекции . . . . .	0,46 <i>Мэв</i>	3,6 <i>Мэв</i>	10 <i>Мэв</i>	9 <i>Мэв</i>
8	Тип инжектора . . . . .	Высоковольтный генератор Кокрофта—Уолтона	Ускоритель Ван-де-Граафа	Линейный ускоритель	Линейный ускоритель
9	Средний прирост энергии за оборот . . . . .	200 <i>эв</i>	800 <i>эв</i>	1300 <i>эв</i>	2200 <i>эв</i>
10	Время ускорения . . . . .	1 сек.	1 сек.	1,8 сек.	3,3 сек.
11	Число циклов ускорения за 1 мин . . . . .	6	12	10	5
12	Интервал изменения частоты ускоряющего напряжения . . . . .	0,33—9,3 <i>Мгц</i>	0,33—4,18 <i>Мгц</i>	0,36—2,5 <i>Мгц</i>	0,18—1,5 <i>Мгц</i>
13	Вес магнита . . . . .	810 т	2000 т	10 000 т	36 000 т
14	Форма магнита . . . . .	С-образная	С-образная	Ш-образная	Ш-образная

При наличии прямолинейных промежутков эта связь частоты и поля описывается формулой, несколько отличающейся от той, которая следует из (2,9):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = - \frac{ecB_s(t)r_s}{(2\pi r_s + 4L)\sqrt{(eB_s r_s)^2 + E_0^2}} \quad (4,45)$$

где  $L$ —длина прямолинейного промежутка. Зависимость  $f$  от  $B_s$  для синхрофазотрона ОИЯИ приведена на рис. 11. Для нормальной работы ускорителя требуется очень точное поддержание закона частоты в процессе ускорения. Отклонение частоты от требуемой (медленная девиация частоты) приводит к смещению равновесного радиуса и, стало быть, к потере части рабочей области камеры.

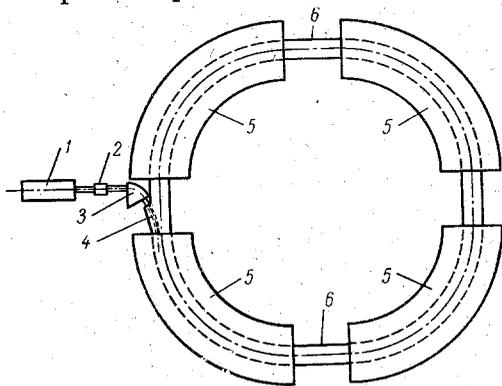


Рис. 10. Принципиальная схема синхрофазотрона ОИЯИ.

Протоны предварительно ускоряются в линейном ускорителе 1 до энергии 9 Мэв. Затем пучок частиц фокусируется системой квадрупольных магнитных линз 2 и, попадая в поворотный магнит 3, заворачивается на 75°. После прохождения отключающих пластин 4, на которые подается напряжение до 70 кВ, частицы дополнительно поворачиваются на 15° и вводятся внутрь камеры на мгновенную орбиту. Благодаря росту магнитного поля, создаваемого в четырех квадрантах электромагнита 5, мгновенная орбита смещается внутрь камеры. Когда мгновенная орбита достигает центра камеры, включается ускоряющее напряжение на электродах, размещенных в прямолинейных промежутках 6. Дальнейшее ускорение производится на центральной орбите постоянного радиуса.

Такие смещения равновесного радиуса особенно опасны в начальный период ускорения, так как, ввиду больших амплитуд свободных и фазовых колебаний они неизбежно будут приводить к потерям частиц на вводящих пластинах и вертикальных стенках камеры и, следовательно, к снижению интенсивности.

Уравнение для фазовых колебаний в синхрофазотроне с прямолинейными промежутками отличается от обычного (3,17а) только тем, что вместо  $K_s$  в коэффициенте при  $\frac{d\Phi}{dt}$  стоит произведение  $K_s F_s$ . При кратности  $q = 1$  это уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{K_s F_s \omega_s^2} \frac{d\Phi}{dt} \right) - \frac{eV_0}{2\pi} \cos \Phi = - \frac{eV_0}{2\pi} \cos \Phi_s. \quad (4,47)$$

Сообразно с этим и частота фазовых колебаний выражается формулой,

и смещением равновесного радиуса выражается согласно (4,45) следующей формулой:

$$\frac{\Delta r_s}{r_s} = - \frac{\Delta f}{f F_s} \frac{1}{n + \beta_s^2 (1 - n)}. \quad (4,46)$$

Множитель

$$F_s = 1 - \frac{4L}{(2\pi r_s + 4L)[n + \beta_s^2 (1 - n)]}$$

появляется из-за наличия прямолинейных промежутков и всегда меньше единицы (для ускорителя без прямолинейных промежутков  $F_s \equiv 1$ ). Например,

ошибка в частоте  $\frac{\Delta f}{f} = \pm 0,2\%$

приводит в синхрофазотроне ОИЯИ к смещению радиуса равновесной орбиты на  $\pm 11$  см, т. е. уменьшает используемую рабочую область камеры на 22 см.

Такие смещения равновесного радиуса особенно опасны в начальный период ускорения, так как, ввиду больших амплитуд свободных и фазовых колебаний они неизбежно будут приводить к потерям частиц на вводящих пластинах и вертикальных стенках камеры и, следовательно, к снижению интенсивности.

несколько отличной от (3,23)

$$\Omega = \omega_s \sqrt{\frac{eV_0 K_s F_s \sin \Phi_s}{2\pi E_s}} \quad (4,48)$$

Частота фазовых колебаний в процессе ускорения меняется, причем диапазон ее изменения в синхрофазотронах на большие энергии включает в себя частоты, кратные техническим. Так, например, в синхрофазотроне ОИЯИ частота фазовых колебаний меняется за время ускорения от 2000 гц до 700 гц. В то же время пульсации магнитного поля, появляющиеся в результате двенадцатифазного выпрямления переменного электрического тока, имеют основную гармонику 600 гц. Отсюда ясно, что при частоте фазовых колебаний 1800 гц и 1200 гц будет наблюдаться резонансная раскачка фазовых колебаний под действием третьей и второй гармоник пульсаций магнитного поля. Раскачка фазовых колебаний не опасна в том случае, если их амплитуда за время прохождения через резонанс не нарастет до размеров области устойчивости. В противном случае частицы, покинув область устойчивости, в среднем не будут получать энергию от ускоряющей системы и благодаря росту магнитного поля попадут на внутреннюю стенку камеры.

В действительности, однако, амплитуда вынужденных фазовых колебаний не должна превышать некоторой предельной величины, несколько меньшей размеров области фазовой устойчивости. Это связано, например, с тем, что пульсации магнитного поля, кроме резонансной раскачки фазовых колебаний, приводят также к колебаниям границы области устойчивости, вследствие чего наблюдаются потери частиц, находящихся вблизи нее. Впрочем, для оценок можно считать, что указанная предельная величина совпадает с размером области устойчивости.

Резонанса в начале ускорения при частоте 1800 гц можно избежать, подбирая амплитуду ускоряющего напряжения  $V_0$  так, чтобы частота фазовых колебаний была все время меньше этого резонансного значения. Наиболее опасным является резонанс со второй гармоникой пульсаций поля 1200 гц, который не удастся обойти.

Фазовое уравнение при наличии пульсаций принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{\omega_s^2 K_s F_s} \frac{d\eta}{dt} \right) - \frac{eV_0}{2\pi} \cos(\Phi_s + \eta) = -\frac{eV_0}{2\pi} \cos \Phi_s + Q, \quad (4,49)$$

где  $Q$  — резонансная сила, определяемая формулой

$$Q = \frac{er_s(2\pi r_s + 4L)}{\pi c} h_2 \Omega_2 \cos \Omega_2 t, \quad (4,50)$$

$h_2$  — амплитуда второй гармоники пульсаций поля,  $\Omega_2$  — ее частота. Фазовое уравнение является нелинейным, поэтому решение его представляет довольно сложную задачу. Обычно для оценки влияния

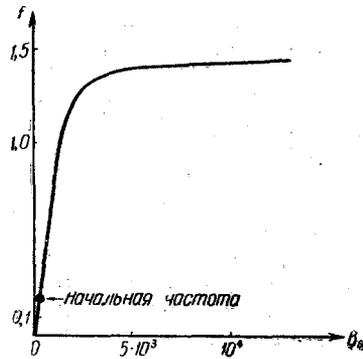


Рис. 11. Зависимость частоты ускоряющего напряжения  $f$  от абсолютной величины магнитного поля  $B_s$  в синхрофазотроне ОИЯИ, причем  $f$  берется в Мгц,  $B_s$  — в гауссах.

пульсаций решают линеаризованное по  $\eta$  уравнение. В этом случае нетрудно определить амплитуду вынужденных фазовых колебаний после прохождения через резонанс

$$\eta_{\max} = \pi \frac{h_2}{B_s (1-n) (2\pi r_s + 4L)} \frac{\sqrt{2\pi} r_s \omega}{\sqrt{\dot{\Omega}}} \quad (4,51)$$

$\eta_{\max}$  пропорциональна амплитуде резонансной гармоники  $h_2$  и обратно пропорциональна  $\sqrt{\dot{\Omega}}$ ;  $\dot{\Omega}$  определяет скорость прохождения через резонанс. Следовательно, для уменьшения амплитуды вынужденных колебаний нужно, с одной стороны, принимать меры по подавлению пульсаций, с другой стороны, увеличивать скорость прохождения через резонанс. Последнего можно, в частности, достичь быстрым изменением амплитуды ускоряющего напряжения  $V_0$  в районе резонанса. Ограничение на  $h_2$  при заданной величине  $\dot{\Omega}$  нетрудно получить из условия, чтобы амплитуда вынужденных фазовых колебаний не превышала размеров области устойчивости. В этом случае для синхрофазотрона ОИЯИ имеем  $h_2 < 0,01$  гаусс. Таким образом, пульсации в магнитном поле должны быть в миллион раз меньше основного поля. Но это и неудивительно, так как в данном случае пульсации в скорости нарастания магнитного поля  $h_2 \dot{\Omega}_2$ , определяющие резонансную силу  $Q$ , всего лишь в 50 раз меньше расчетной величины  $\dot{B} = 4000$  гаусс/сек.

Кроме рассмотренного резонанса фазовых колебаний с пульсациями магнитного поля возможны также резонансы с пульсациями амплитуды и частоты ускоряющего напряжения. Эти резонансы рассматриваются аналогичным образом<sup>37, 39</sup>.

Приведенное решение в линейном приближении справедливо лишь в том случае, когда  $\eta_{\max}$  мало по сравнению с размерами области устойчивости. Для строгой оценки необходимо рассматривать нелинейную задачу. Учет нелинейности<sup>37, 38, 40</sup> показал, что требования к величине пульсаций могут быть значительно снижены.

Несмотря на отмеченные выше трудности обеспечения автофазировки в синхрофазотроне, основные неприятности в этой установке связаны со свободным движением. Дело в том, что силы, обеспечивающие устойчивость свободного движения частиц, при релятивистских энергиях обратно пропорциональны радиусу. В самом деле, согласно (3,14) и (3,14б) фокусирующие силы пропорциональны члену  $E_s \omega_s^2$ , который для релятивистского случая равен  $-\frac{e B_s c^2}{r_s}$ .

В синхрофазотронах, ввиду больших радиусов орбит, эти силы слабы. В связи с этим в таких установках необходимо создавать достаточно высокий вакуум, очень точно подбирать угол инжекции, иметь хорошее соответствие реального магнитного поля расчетному. Достаточно сказать, что первая гармоника искажения вертикальной составляющей магнитного поля с амплитудой 0,5% привела бы в синхрофазотроне ОИЯИ в результате искажения орбиты к уменьшению рабочей области на  $\sim 50$  см. Первая гармоника азимутального распределения поверхности  $B_z = 0$  с амплитудой в 1 см уменьшила бы рабочую область по вертикали на 10 см.

Указанные искажения магнитного поля могут привести к уменьшению интенсивности пучка ускоренных частиц и даже к нарушению работы ускорителя. В синхрофазотроне это усугубляется тем, что благодаря наличию прямолинейных промежутков создается возможность появления таких возмущений как неточность установки секторов, смещение

плоскостей симметрии магнитного поля в секторах, неточность в угловом размере секторов и т. п.

Точности, необходимые при впуске частиц в камеру ускорителя, проиллюстрируем на следующем примере: если при вылете частиц из инжекционной системы они имели бы угол по отношению к средней плоскости магнита в  $20'$ , то, не сделав и оборота, эти частицы попали бы на горизонтальные стенки вакуумной камеры.

Как уже отмечалось в § 3, во всяком циклическом ускорителе при определенных значениях  $n$  возможна резонансная раскачка свободных колебаний. При наличии прямолинейных промежутков характер резонансных явлений остается примерно тем же, что и в круговых машинах, но резонансные значения  $n$  несколько смещаются. В частности, простые резонансы, которые в круговых установках «осуществляются» лишь на границах области устойчивости ( $n=0$  и  $n=1$ ), оказываются теперь смещенными внутрь этой области, причем величина смещения растет с увеличением длины прямолинейных промежутков.

Формулы, характеризующие смещение «линейных» резонансов при  $\frac{L}{2r_s} \ll 1$ , что практически всегда выполняется, приведены в таблице II.

Таблица II

Тип резонанса	Для радиальных колебаний	Для вертикальных колебаний
Простой резонанс вместе с параметрическим . . . . .	$n \approx \frac{2L}{\pi r_s}$	$n \approx 1 - \frac{2L}{\pi r_s}$
Параметрический резонанс . . . . .	$n \approx 0,75 + \frac{L}{2\pi r_s}$	$n \approx 0,25 - \frac{L}{2\pi r_s}$
Резонансы связи вертикальных и радиальных колебаний . . . . .	$n = 0,5$ $n \approx \left(\frac{L}{\pi r_s}\right)^2$ $n \approx 1 - \left(\frac{L}{\pi r_s}\right)^2$	

Таким образом, при наличии прямолинейных промежутков резонансных значений  $n$  в области устойчивости становится больше, чем в круговой установке.

Подробное рассмотрение свободных колебаний в синхрофазотроне с прямолинейными промежутками, анализ резонансных явлений со свободными колебаниями и явлений, связанных с отклонением магнитного поля от расчетного, проведен в работах ряда авторов <sup>37, 38, 41, 42, 43</sup>.

Подводя итог, можно сказать, что принцип автосфазировки, являясь «сердцем» современной ускорительной техники, позволяет ускорять частицы до все больших и больших энергий, но каждый шаг в повышении энергии ставит новые сложные проблемы перед физикой и техникой. Опыт развития ускорителей показывает, однако, что все эти проблемы рано или поздно разрешаются, и физики получают в свое распоряжение все более и более мощные инструменты.

## Г. Микротрон

Рассмотренные выше три типа циклических резонансных ускорителей не исчерпывают всех возможностей автофазировки. Оказывается, при определенных условиях можно осуществить резонансный режим ускорения в постоянном поле и при постоянной частоте ускоряющего напряжения. Идея такого метода ускорения также была высказана в 1944 г.

В. И. Векслером<sup>3,5</sup>. Суть ее заключается в том, что возрастание периода обращения частиц с ростом их энергии можно сделать равным или кратным периоду высокочастотного поля. Таким образом, в этом методе используется как раз то явление, которое в циклотроне мешает ускорению. Эта установка получила название микротрон, поскольку здесь для ускорения применяется переменное электрическое поле высокой частоты (длина волны  $\lambda \sim 10$  см).

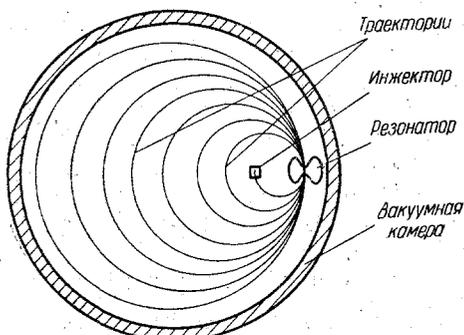


Рис. 12. Принципиальная схема микротрона.

Микротрон изображен на рис. 12. Период обращения частицы после  $n$ -го прохождения ускоряющего промежутка выражается формулой

$$T_n = -\frac{2\pi E_n}{ecB} = -\frac{2\pi \left( E_i + \sum_{j=1}^n eV_j \right)}{ecB}, \quad (4,52)$$

где  $E_i$  — полная начальная энергия частицы, а  $eV_j$  — прирост энергии при  $j$ -м прохождении. Отсюда получаем выражение для приращения периода обращения частиц за оборот

$$\Delta T_n = T_n - T_{n-1} = -\frac{2\pi V_n}{cB}. \quad (4,53)$$

Очевидно, для обеспечения «точного» резонанса необходимо, чтобы удовлетворялись следующие два условия:

1) Приращение периода за оборот должно быть равным или кратным периоду высокочастотного поля  $T_0$

$$\Delta T_s = -\frac{2\pi V_s}{cB} = qT_0. \quad (4,54)$$

2) Начальный период обращения должен быть также кратен периоду  $T_0$

$$T_i = -\frac{2\pi E_i}{ecB} = iT_0. \quad (4,55)$$

Эти основные соотношения и определяют работу микротрона. Из выражения (4,54) непосредственно определяется прирост энергии равновесной частицы за оборот

$$\Delta E_s = eV_s = eV_0 \cos \Phi_s = -\frac{eB\lambda}{2\pi} q, \quad (4,56)$$

где  $\lambda$  — длина волны ускоряющего поля.

В микротроне, как и в других рассмотренных выше ускорителях, осуществляются фазовые колебания частиц около равновесной фазы  $\Phi_s > 0$ , но здесь ненарастающие колебания существуют только при  $\Phi_s \leq \Phi_{s\text{кр}} =$

$= \arctg \frac{2}{\pi q}$ . Наличие фазовых колебаний нетрудно показать, проводя рассуждения такие же, как в § 2. Действительно, пусть частица с равновесной энергией прошла ускоряющий промежуток в фазе  $\Phi > \Phi_s > 0$ . Тогда она получит большую энергию, чем равновесная частица, и ее период обращения станет больше равновесного. При следующем прохождении ускоряющего промежутка она несколько отстанет по фазе, т. е. ее фаза приблизится к  $\Phi_s$ . Если рассматриваемая частица пройдет промежуток при фазе  $\Phi < \Phi_s$ , то, очевидно, она также будет стремиться вернуться к фазе  $\Phi_s$ . Отсюда видно, что неравновесные частицы будут совершать фазовые колебания около положения равновесия  $\Phi_s > 0$ . Аналогичными рассуждениями можно показать неустойчивость движения относительно фазы  $\Phi_s < 0$ .

Для выяснения характера фазовых колебаний при  $\Phi_s > 0$  проведем более строгий расчет. Из выражения (4,53), переходя от периодов и напряжений к фазам и рассматривая только малые отклонения от  $\Phi_s$  ( $\Phi = \Phi_s + \eta$ ), нетрудно получить рекуррентное соотношение

$$\eta_{n+2} - 2(1 - q\pi \operatorname{tg} \Phi_s) \eta_{n+1} + \eta_n = 0, \quad (4,57)$$

которое удовлетворяется при

$$\eta_n = a \cos(\nu n + \delta), \quad (4,58)$$

где  $a$  и  $\delta$  — константы, зависящие от начальных условий, и

$$\cos \nu = 1 - q\pi \operatorname{tg} \Phi_s. \quad (4,59)$$

Из (4,58) и (4,59) видно, что ненарастающие малые колебания около  $\Phi_s$  происходят при

$$0 < \operatorname{tg} \Phi_s < \frac{2}{q\pi} = \operatorname{tg} \Phi_{s \text{ кр.}} \quad (4,60)$$

Вне этой области равновесных фаз имеем

$$\eta_n = a \operatorname{ch}(\nu n + \delta) \quad \text{при} \quad \Phi_s < 0 \quad (4,61)$$

и

$$\eta_n = a (-1)^n \operatorname{ch}(\nu n + \delta) \quad \text{при} \quad \Phi_s > \Phi_{s \text{ кр.}} \quad (4,62)$$

Эти результаты впервые были строго получены А. А. Коломенским<sup>44</sup>.

Таким образом, в микротроне устойчивые равновесные фазы довольно малы (при  $q=1$   $0 < \Phi_s < 32^\circ$ ) и, следовательно, размеры области устойчивости небольшие (см. § 3). Условие  $\cos \Phi_s < 1$  или, согласно (4,56),

$$\left| \frac{q\lambda B}{2\pi V_0} \right| < 1 \quad (4,63)$$

приводит к малым значениям  $B$  и, стало быть, к большим размерам установки, что накладывает технический предел на достижимые энергии в микротроне. Так, например, при  $q=1$ ,  $V_0=500$  кэВ и  $\lambda=10$  см получаем  $B < 1050$  гаусс, и при радиусе установки 1 м имеем только  $E_{\text{max}}=30$  МэВ. Этот факт является существенным недостатком микротрона, так как в нем мы не можем использовать всех возможностей магнитного поля. Отсюда также видна неприменимость микротрона для ускорения тяжелых частиц. Микротрон по сути своей является электронным ускорителем.

Наряду с указанным недостатком микротрон имеет ряд преимуществ. Он, так же как и циклотрон, в принципе может работать в квазинепрерывном режиме. Это позволяет иметь существенно большую среднюю интенсивность ускоренных частиц по сравнению с бетатроном

и синхротроном. Кроме того, в микротроне можно сравнительно легко осуществить вывод ускоренного пучка электронов благодаря относительно большому расстоянию между соседними орбитами. Однако, несмотря на все преимущества микротрона, он до сих пор не получил широкого развития. Для проверки микротронного режима ускорения в 1948 г. в Канаде была построена установка на энергию 4,6 Мэв<sup>45</sup>, экспериментально подтверждающая существование такого режима. Значительные успехи, достигнутые за последние годы в технике дециметровых и сантиметровых радиоволн, пробудили снова интерес физиков к этой установке. Теоретические исследования, проведенные Е. М. Мороз<sup>46</sup>, показали, что в микротроне существуют другие режимы ускорения, при которых ограничение (4,63) снимается. Можно потребовать, чтобы резонансную порцию энергии (4,56) частицы приобретали не за одно прохождение ускоряющей щели, а за целый цикл проходов, причем в процессе ускорения частицы будут совершать много таких циклов. Этот режим ускорения получил название смягченного. Переход к смягченному режиму позволит увеличить длину волны резонатора или напряженность магнитного поля или уменьшить амплитуду ускоряющего напряжения в 1,4—1,7 раз. Однако осуществление такого режима сопряжено с большими трудностями, связанными с тем обстоятельством, что область фазовой устойчивости становится очень малой.

Обратим также внимание на возможность использования в микротроне секционированных магнитных систем<sup>47</sup>, применение которых позволит обеспечить фокусировку ускоряемого пучка электронов и сократить зазор между полосами электромагнита.

### § 5. ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

Выше мы рассмотрели особенности различных вариантов циклического резонансного метода ускорения. Остановимся теперь на физических особенностях линейных резонансных ускорителей. Настоящие успехи в развитии этих установок были получены только после открытия принципа автофазировки. Успешному их сооружению способствовал также значительный прогресс в радиотехнике.

В настоящее время сооружаются и разрабатываются линейные резонансные ускорители двух типов. В одном из них для ускорения частиц используется стоячая, в другом — бегущая электромагнитная волна.

В ускорителях на стоячей волне, которые применяются для ускорения тяжелых частиц, волна возбуждается внутри полого резонатора с направлением напряженности поля  $\mathcal{E}$  вдоль его оси (волна типа  $TM$ ). Резонатор по оси нагружается так называемыми дрейфовыми трубками, и пучок частиц, двигаясь вдоль оси, ускоряется в зазорах между ними. Эти трубки нужны для экранировки ускоряемых частиц от действия поля в то время, когда оно становится замедляющим. Длины дрейфовых трубок (мы будем пренебрегать размерами зазоров между ними) подбираются в соответствии с изменением скорости резонансной частицы в процессе ускорения так, чтобы время пролета частиц от одного зазора до другого было равно периоду ускоряющего поля или кратно ему. При  $q=1$  длина  $n$ -й дрейфовой трубки  $L_n$  определяется формулой

$$L_n = T v_n, \quad (5,1)$$

где  $v_n$  — скорость резонансной частицы,  $T$  — период ускоряющего поля

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (5,2)$$

Ускорители второго типа применяются для ускорения электронов. В них бегущая волна, напряженность  $\mathcal{E}$  которой также направлена вдоль оси, распространяется в волноводе. Очевидно, для эффективного ускорения фазовая скорость волны должна быть равной или близкой к скорости частиц. Так как скорость частиц в процессе ускорения меняется, то и фазовая скорость волны для сохранения резонанса должна соответственно меняться. Для замедления фазовой скорости, которая в обычных волноводах превышает скорость света  $c$ , волновод нагружают диафрагмами<sup>48</sup>. Ниже мы коснемся только вопросов устойчивости режима ускорения и радиального движения частиц в линейных резонансных ускорителях.

Рассмотрим сначала аксиальное движение и условия фазовой устойчивости в ускорителе с бегущей волной. Частицы в таком ускорителе движутся в электрическом поле волны, которую можно записать в виде

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \cos \omega \left( t - \int_0^z \frac{dz}{v_0(z)} \right), \quad (5,3)$$

где  $\mathcal{E}_0$  и  $\omega$  — соответственно постоянные амплитуда и частота бегущей волны, а  $v_0(z)$  — медленно меняющаяся скорость распространения волны. Уравнение продольного движения, очевидно, будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} (E\dot{z}) = c^2 e \mathcal{E}_0 \cos \omega \left( t - \int_0^z \frac{dz}{v_0(z)} \right), \quad (5,4)$$

где энергия выражается обычной релятивистской формулой

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}}. \quad (5,5)$$

Здесь мы предполагаем, для простоты, что движение по  $r$  и  $\theta$  отсутствует. Введем вместо  $z$  фазу бегущей волны в месте нахождения частицы

$$\Phi = \omega \left( t - \int_0^z \frac{dz}{v_0(z)} \right), \quad (5,6)$$

откуда

$$\dot{\Phi} = \omega \left( 1 - \frac{\dot{z}}{v_0(z)} \right). \quad (5,7)$$

Тогда уравнение (5,4) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left( E v_0 \frac{\dot{\Phi}}{\omega} \right) + e c^2 \mathcal{E}_0 \cos \Phi = \frac{d}{dt} (E v_0) = e c^2 \mathcal{E}_0 \cos \Phi_s. \quad (5,8)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3,17а) только знаками при членах, содержащих  $\cos \Phi$  и  $\cos \Phi_s$ . Рассматривая малые отклонения от  $\Phi_s$  ( $\Phi = \Phi_s + \eta$ ,  $\dot{\Phi} = \dot{\eta}$ ), получаем линеаризованное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( E v_0 \frac{\dot{\eta}}{\omega} \right) - e c^2 \mathcal{E}_0 \sin \Phi_s \eta = 0, \quad (5,9)$$

из которого видно, что колебания возможны только около  $\Phi_s < 0$ . Таким образом, в линейном ускорителе, в противоположность циклическим, устойчивая фаза  $\Phi_s < 0$ . Последнее можно объяснить, рассматривая качественно движение частиц около этой равновесной фазы. Если частица

с равновесной энергией в некоторый момент имеет фазу, несколько большую  $\Phi_s$ , то она будет получать от ускоряющей волны больше энергии, чем равновесная частица. Следовательно, эта частица будет двигаться быстрее равновесной, опережать волну, и ее фаза будет смещаться к  $\Phi_s$ . В случае отклонения частицы в сторону фаз, несколько меньших  $\Phi_s$ , картина будет аналогичной. Частица будет получать от волны меньше энергии, чем равновесная и, следовательно, будет отставать от волны, и ее фаза будет также приближаться к  $\Phi_s$ . Подобными рассуждениями можно показать, что фаза  $\Phi_s > 0$  неустойчива. Заметим, что колебания фазы в линейном ускорителе связаны только с аксиальными колебаниями и колебаниями энергии и не связаны с поперечным движением.

В ускорителе со стоячей волной продольное движение можно рассматривать так же, как продольное движение в ускорителе с бегущей волной. Действительно, в ускорителе со стоячей волной частицы получают энергию только в зазорах между дрейфовыми трубками, размерами которых мы пренебрегаем. Прирост энергии в отдельном зазоре можно мысленно размазать на всю предыдущую дрейфовую трубку, считая, что внутри нее распространяется бегущая волна со скоростью синхронной частицы. Прделав эту мысленную операцию для всех дрейфовых трубок, мы получим картину, идентичную ускорителю с бегущей волной. Следовательно, ввиду наличия устойчивости аксиально-фазового движения в ускорителях с бегущей волной эта же устойчивость существует и в ускорителях со стоячей волной.

Очевидно, для работы линейных резонансных ускорителей, кроме фазовой устойчивости ускоряемого пучка частиц, требуется также его радиальная устойчивость, которая, как будет показано ниже, без принятия специальных мер вообще отсутствует.

Отсутствие радиальной устойчивости в ускорителе с бегущей волной легко показать, если перейти в систему координат, связанную с волной. Законность такого перехода очевидна, так как ввиду медленного изменения скорости распространения волны ее на некотором участке можно считать постоянной. В этой системе волне соответствует электростатическое поле, равновесная частица покоится, а остальные совершают медленные аксиальные колебания около нее. Согласно теореме Ирншоу электростатический потенциал в пустом пространстве не может иметь ни абсолютного максимума, ни абсолютного минимума, а может иметь особенности лишь в виде седловидных точек, в которых в одном направлении осуществляется максимум, а в другом—минимум потенциала. Следовательно, если осуществляется устойчивость частиц в аксиальном направлении, то в радиальном направлении устойчивость отсутствует, и наоборот (последнее соответствует фазе  $\Phi_s > 0$ —неустойчивое равновесие по фазам). При приближении скорости волны к скорости света как радиальная неустойчивость, так и фазовая устойчивость ослабевают, что приводит в конечном счете к безразличному равновесию.

В ускорителе со стоячей волной фокусировка по радиусу также отсутствует, что объясняется следующим. Поле в зазоре между дрейфовыми трубками (рис. 13) имеет  $\mathcal{E}_r$  компоненту, причем на входе в зазор  $\mathcal{E}_r$  направлена к центру, а на выходе—от центра. В статическом поле или вблизи максимума напряженности  $\mathcal{E}$ , как известно, осуществляется фокусировка. В самом деле, частица, ускорившись в зазоре, проходит дефокусирующую часть поля быстрее, чем фокусирующую, и, следовательно, при постоянном или почти постоянном  $\mathcal{E}_r$  импульс фокусирующей силы больше импульса дефокусирующей силы. В ускорителе со стоячей волной поле в зазоре между дрейфовыми трубками во время пролета резонансной частицы нарастает и увеличение  $\mathcal{E}_r$  к моменту прохождения частицами дефо-

кусирующей области дает гораздо больший импульс силы, что в результате приводит к общей дефокусировке.

Следовательно, для хорошей работы линейных ускорителей необходимо принимать специальные меры по обеспечению радиальной устойчивости. Для электронов это возможно осуществить путем создания слабого продольного магнитного поля. Для протонов такой способ не применим, так как требуются поля в 40—50 тыс. эрстед, создание которых в больших объемах сопряжено с большими трудностями. В протонных линейных ускорителях для осуществления радиальной фокусировки передние концы дрейфовых трубок закрывают металлическими сетками или фольгами, «обрезая», тем самым, дефокусирующую часть электрического поля. В последнее время, после открытия сильной фокусировки, о которой будет говориться ниже, стало возможным обеспечивать радиальную фокусировку, применяя так называемые квадрупольные линзы<sup>49, 50, 51, 52</sup>.

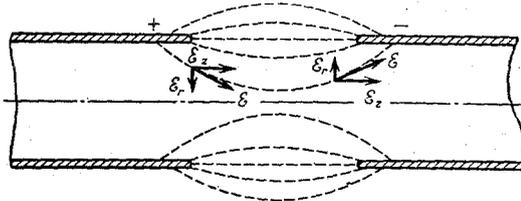


Рис. 13. Распределение напряженности электрического поля в зазоре между дрейфовыми трубками.

Разработкой различных вопросов теории и техники линейных резонансных ускорителей занимались многие советские и иностранные авторы. Большой вклад в развитие линейных ускорителей в Советском Союзе внесен группой сотрудников Физико-технического института Академии наук УССР, которые, в частности, построили под руководством профессора К. Д. Синельникова линейный ускоритель протонов на 10 Мэв, используемый в синхрофазотроне ОИЯИ в качестве инжектора частиц.

В линейных резонансных ускорителях ускоряющее поле, в противоположность циклическим, используется однократно. Это является существенным их недостатком, так как ведет к очень большим линейным размерам установок. Например, линейный ускоритель на 1 Бэв должен иметь размеры по крайней мере в несколько сот метров. Большие размеры приводят к трудностям при настройке ускоряющих систем. Наряду с этим существенным недостатком, который, однако, в настоящее время является, пожалуй, единственным, линейные ускорители имеют ряд преимуществ перед циклическими. Они не требуют создания сложных и громоздких магнитных систем; в них не возникают трудности с инжекцией и выводом частиц, в линейных ускорителях для электронов практически отсутствует излучение; кроме того, в связи с открытием сильной фокусировки, принципиально решен вопрос обеспечения эффективной радиальной устойчивости частиц. Все эти преимущества могут сделать линейные резонансные ускорители серьезными конкурентами циклическим. В настоящее время уже имеются линейные ускорители на энергию электронов 630 Мэв<sup>53</sup>. Протоны же удалось ускорить пока всего лишь до 32 Мэв<sup>54</sup>. Правда, в последнее время обсуждается проект протонного линейного ускорителя на энергию 600 Мэв<sup>54</sup>.

### § 6. СИЛЬНОФОКУСИРУЮЩИЕ УСКОРИТЕЛИ

Наибольшая энергия частиц, которую можно получить с помощью циклических ускорителей, определяется, в конечном счете, произведением максимального радиуса кривизны равновесной орбиты частиц на максимальную напряженность магнитного поля на ней. Соответствующую

щее выражение для этой энергии в релятивистском случае имеет, согласно (3,9г), следующий простой вид:

$$E_{\max} \approx 300 B_s \max r_s \max^* \quad (6,1)$$

где  $E$  выражается в эв,  $B_s$  — в гауссах и  $r_s$  — в см. В результате насыщения железа при больших индукциях величина напряженности магнитного поля, достижимая в электромагнитах ускорителей, не превышает 15—20 тыс. гаусс. В связи с этим желание получать с помощью циклических ускорителей достаточно высокие энергии частиц вынуждает идти по пути увеличения радиуса установок. Это обстоятельство накладывает, с экономической точки зрения, как уже отмечалось, предел  $\sim 1$  Бэв на максимальную энергию частиц, достижимую с помощью фазотрона. В синхрофазотронах этот предел примерно на порядок выше. Такое сравнительно небольшое повышение предела получаемых в синхрофазотроне энергий объясняется следующим. Как уже говорилось в разделе о синхрофазотроне, с увеличением радиуса орбиты фокусировка частиц ухудшается. Поэтому при повышении максимальной энергии наряду с увеличением радиуса приходится пропорционально увеличивать как радиальную, так и вертикальную апертуру зазора электромагнита. Следовательно, вес магнита больших кольцевых ускорителей растет приблизительно как куб максимальной энергии, т. е. по тому же закону, что и вес магнита фазотрона, рассчитанного на релятивистские энергии частиц.

Конечно, в синхрофазотроне при повышении энергии можно не увеличивать апертуру камеры, а предъявлять более высокие требования к инжекции, вакууму в камере ускорителя, точности изготовления и сборки магнита и т. д., но это позволит, вероятно, повысить предельную энергию всего лишь в полтора, максимум в два раза. Хотя теоретически предел для достижимых энергий частиц в ускорителях, основанных на принципе автофазировки, отсутствует, однако до 1952 г. не было видно каких-либо реальных путей практического получения частиц с энергией, превышающей 10—15 Бэв. Выход из создавшегося положения был найден Курантом, Ливингстоном и Снайдером<sup>49</sup>, предложившими в 1952 г. метод значительного повышения фокусирующих сил в циклических ускорителях (\*\*). Вопрос об улучшении фокусировки частиц в автофазировочных ускорителях последние пять лет широко обсуждается и уже опубликованы проекты и начато строительство синхрофазотронов с «сильной фокусировкой» на энергию 25 Бэв в Женеве при Европейском Совете ядерных исследований (CERN) и в США. В Советском Союзе опубликован проект еще более мощного сильнофокусирующего ускорителя на энергию 50—60 Бэв<sup>55</sup> и начато строительство его модели — ускорителя на 7 Бэв<sup>56</sup>. Работы по проектированию и сооружению этих установок возглавляются В. В. Владимирским, Е. Г. Комаром и А. Л. Минцем.

В чем заключается идея сильной фокусировки? Для ответа на этот вопрос напомним (см. § 1), что при увеличении  $n$  в циклических ускорителях улучшается вертикальная фокусировка частиц, но уже при  $n > 1$  радиальное движение становится неустойчивым. Наоборот, при больших отрицательных  $n$  будет хорошая радиальная устойчивость и дефокусировка в вертикальном направлении. Курант, Ливингстон и Снайдер подметили, что эти свойства могут быть с успехом использованы для одновременного обеспечения «сильной фокусировки» по обоим направлениям, если отка-

\*) Здесь под  $B_s$  понимается абсолютная величина магнитного поля.

\*\*) Аналогичный метод был предложен греческим инженером Николаем Кристофилосом еще в 1950 г., однако его отчет, опубликованный частным образом, стал известен уже после выхода в свет работы<sup>49</sup>.

заться от условия цилиндрической симметрии поля, так как в цилиндрически симметричном поле одновременная устойчивость возможна лишь в случае  $0 < n < 1$ , т. е. при малых  $n$  и, соответственно, малых фокусирующих силах. Сущность предложения указанных авторов сводится к следующему. Магнит сильнофокусирующего ускорителя составляется из отдельных секторов, магнитное поле в которых либо резко нарастает ( $n \ll 0$ ), либо резко спадает ( $n \gg 0$ ) по радиусу, причем эти секторы располагаются поочередно. В простейших случаях угловые размеры всех секторов и абсолютные значения показателей спада поля в них выбираются примерно одинаковыми. Магнитное поле такой конфигурации, попеременно то фокусирующее, то дефокусирующее по каждому из двух направлений, приводит при определенных условиях к устойчивости движения в обоих направлениях, и суммарная фокусировка получается значительно более сильной, чем при  $0 < n < 1$ , и тем сильнее, чем больше абсолютное значение  $n$ . Устойчивость такого типа можно пояснить примером из оптики: при использовании в объективе двух линз с разными по знаку оптическими силами, т. е. фокусирующей и дефокусирующей линзы, объектив при определенных условиях оказывается фокусирующим. При этом фокусирующее действие такого объектива, составленного из линз с большими и примерно равными по модулю оптическими силами, может оказаться значительно лучше, чем фокусирующее действие одной собирающей, но слабой линзы.

Перейдем к описанию движения частиц в сильнофокусирующих ускорителях. Прежде всего остановимся на вопросе о свободных колебаниях частиц, которые теперь, очевидно, не будут уже синусоидальными. По этому вопросу в настоящее время имеется большое количество литературы. Помимо <sup>49</sup>, укажем также на некоторые работы советских физиков <sup>57, 58, 59, 43, 22</sup>, внесших большой вклад в разработку теории подобных установок.

При анализе свободного движения частиц будем считать, что магнит ускорителя составлен из  $N$  элементов периодичности, т. е. из  $N$  «положительных» ( $n > 0$ ) и  $N$  «отрицательных» ( $n < 0$ ) секторов, а прямолинейные промежутки отсутствуют. Ради простоты предположим, что все секторы имеют одинаковую кривизну и магнит имеет форму кругового кольца, т. е. центры кривизны всех секторов расположены в одной точке  $O$ . Пусть на некоторой окружности радиуса  $r_s$  с центром  $O$  напряженности магнитного поля в положительных и отрицательных секторах совпадают. Соответственно в положительных секторах при  $r > r_s$  поле меньше, чем при  $r = r_s$ , а в отрицательных — больше. Принимая эту окружность за равновесную орбиту, рассмотрим свободные колебания частиц с равновесной энергией. Уравнения этих колебаний; в соответствии с (1,18), могут быть записаны в виде

$$x'' + x^2 gx = 0. \tag{6,2}$$

Здесь дифференцирование производится по азимутальному углу  $\theta$ ;  $x$  означает либо  $\rho$ , либо  $z$ ;

$$x^2 = \begin{cases} x_\phi^2 & \text{в фокусирующих секторах,} \\ x_d^2 & \text{в дефокусирующих секторах,} \end{cases} \tag{6,3}$$

$$g = \begin{cases} 1 & \text{в фокусирующих секторах,} \\ -1 & \text{в дефокусирующих секторах.} \end{cases} \tag{6,4}$$

Для радиального движения  $x_\phi = \sqrt{1 + |n_-|}$ ,  $x_d = \sqrt{n_+ - 1}$ , для вертикального движения  $x_\phi = \sqrt{n_+}$ ,  $x_d = \sqrt{|n_-|}$ , где  $n_+$  — показатель спада поля

в положительных секторах, а  $n_-$  — в отрицательных. Конечно, в уравнении (6,2) не учитывается адиабатического изменения параметров, но в данном случае нас будет интересовать только характер колебаний, который при адиабатическом изменении параметров не меняется.

Так как коэффициент  $x^2g$  при  $x$  в (6,2) не постоянен, а периодически меняется с  $\theta$ , это уравнение уже не описывает гармонического колебательного процесса, а, являясь уравнением Хилла (см., например, <sup>60</sup>), отражает более сложный процесс. Согласно теории Флоке (6,2) имеет, вообще говоря, два линейно-независимых нормальных решения, удовлетворяющих соотношению

$$x(\theta + \tau) = \sigma x(\theta), \quad (6,5)$$

где  $\tau$  — период коэффициента  $x^2g$  (в нашем случае  $\tau = \frac{2\pi}{N}$ ), а  $\sigma$  — некоторое комплексное число.

Ввиду того, что периодический коэффициент  $x^2g$  меняется «скачкообразно» от одного постоянного значения до другого, нетрудно найти аналитический вид нормальных решений:

$$x_1 = e^{i\mu m \phi}(\theta), \quad x_2 = x_1^* = e^{-i\mu m \phi}(\theta), \quad (6,6)$$

где  $m$  — целое число, постоянное в пределах одного элемента периодичности и увеличивающееся на единицу при переходе к каждому следующему элементу периодичности\*).  $\phi(\theta)$  — периодическая функция  $\theta$  с периодом  $\tau$ :

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \cos x_\phi \vartheta + d \sin x_\phi \vartheta & \text{в фокусирующих} \\ & \text{секторах,} \\ (c + sd) \operatorname{ch} x_d \vartheta + f(cd - s) \operatorname{sh} x_d \vartheta & \text{в дефокусирующих} \\ & \text{секторах.} \end{cases} \quad (6,7)$$

Здесь  $\vartheta$  — азимут, меняющийся в данном секторе от 0 до  $\nu$ , где  $\nu$  — угловой растрвор сектора (в фокусирующих секторах  $\vartheta$  меняется от 0 до  $\nu_\phi$ , а в дефокусирующих — от 0 до  $\nu_d$ , причем, очевидно,  $\nu_\phi + \nu_d = \tau$ )

$$c = \cos x_\phi \nu_\phi, \quad s = \sin x_\phi \nu_\phi, \quad f = \frac{x_\phi}{x_d},$$

$$d = \frac{e^{i\mu} + fs \operatorname{sh} x_d \nu_d - c \operatorname{ch} x_d \nu_d}{s \operatorname{ch} x_d \nu_d + c \operatorname{sh} x_d \nu_d}. \quad (6,8)$$

Характеристический показатель  $\mu$  в (6,6) (очевидно,  $e^{i\mu} = \sigma$ ) определяется следующим уравнением:

$$\cos \mu = c \operatorname{ch} x_d \nu_d + s \operatorname{sh} x_d \nu_d \cdot \frac{1-f^2}{2f}. \quad (6,9)$$

Решения (6,6) будут ограниченными, т. е. соответствующие движения будут устойчивыми, если  $\mu$  действительная величина, или

$$|\cos \mu| < 1. \quad (6,10)$$

Отсюда получим соответственно для радиального движения

$$\left| \cos(\sqrt{1 + |n_-|} \nu_-) \operatorname{ch}(\sqrt{n_+ - 1} \nu_+) + \frac{n_+ + n_- - 2}{2\sqrt{(n_+ - 1)(|n_-| + 1)}} \sin(\sqrt{1 + |n_-|} \nu_-) \operatorname{sh}(\sqrt{n_+ - 1} \nu_+) \right| < 1 \quad (6,11)$$

\*) Звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины.

и для вертикального движения

$$\left| \cos(\sqrt{n_+} \nu_+) \operatorname{ch}(\sqrt{|n_-|} \nu_-) - \frac{n_+ + n_-}{2\sqrt{n_+ |n_-|}} \sin(\sqrt{n_+} \nu_+) \operatorname{sh}(\sqrt{|n_-|} \nu_-) \right| < 1, \quad (6,12)$$

где  $\nu_+$  и  $\nu_-$  — угловые растворы соответственно положительных и отрицательных секторов. На рис. 14 показана область совместной устойчивости радиального и вертикального движения при  $\nu_+ = \nu_- \equiv \nu$  в предположении, что  $n_+ \gg 1, |n_-| \gg 1$ , т. е. что в (6,11) и (6,12)

$$1 + |n_-| \approx |n_-|, \quad n_+ - 1 \approx n_+. \quad (6,13)$$

Чем больше допустимый, с точки зрения устойчивости движения, интервал изменения  $n_+$  и  $n_-$  при заданном  $N$ , тем, очевидно, менее жесткие требования предъявляются к поддержанию соответствия между расчетными и истинными значениями показателей спада магнитного поля. В связи с этим  $N$  и расчетные значения  $n_+, n_-$  следует выбирать такими, чтобы «изображающая» точка на рис. 14 была подалеже от границ области устойчивости. Казалось бы, если рабочую точку выбрать в «центре» области устойчивости ( $\cos \mu_r = \cos \mu_z = 0$ ), то допуски на различные параметры были бы сравнительно мягкими. Согласно (6,11), (6,12) и (6,13) в центре области устойчивости

$$n_+ = -n_- \equiv |n|, \quad |n| = \frac{N^2}{4}. \quad (6,14)$$

Однако дальнейшие исследования показали, что допуски должны быть очень жесткими. Это, в частности, связано с большим количеством возможных резонансов, которые могут привести к раскачке свободных колебаний. Не касаясь пока существа вопроса, скажем только, что ввиду этого область устойчивости, изображенная на рис. 14, на самом деле рассечена большим количеством линий и полос резонансной неустойчивости на небольшие ячейки. Изображающая точка должна лежать внутри какой-либо ячейки, и искажения различных параметров должны быть достаточно малыми, чтобы эта точка не сместилась к ее границе.

Используя (6,6), запишем общее решение уравнения (6,2) внутри области устойчивости в следующем виде<sup>61</sup>:

$$x = a(\theta) \cos[\mu t + \varepsilon(\theta) + \varepsilon_0], \quad (6,15)$$

где

$$a(\theta) = \sqrt{\frac{\Psi(\theta)}{\Psi(\theta_i)} [b^2 + \Psi^2(\theta_i) r_s^2 (\gamma - \gamma_{\text{опт}})^2]}. \quad (6,16)$$

Здесь

$$\Psi(\theta) = -\frac{2i}{D} \phi(\theta) \phi^*(\theta) \quad \text{и} \quad \varepsilon(\theta) = \arg \phi(\theta) \quad (6,17)$$

являются не зависящими от начальных условий действительными периодическими функциями  $\theta$  с периодом  $\tau$ ,  $D$  — вронскиан функций  $\phi(\theta)$

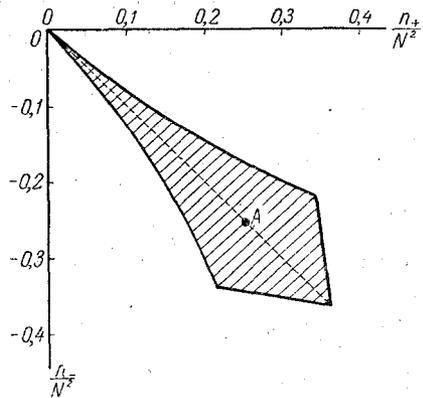


Рис. 14. Область устойчивости для ускорителя с сильной фокусировкой. По осям отложено  $n/N^2 = n\nu^2/\pi^2$  соответственно для положительных и отрицательных секторов, где  $n$  — значение показателя спадания поля,  $N$  — число элементов периодичности (число пар секторов),  $\nu$  — угловой раствор секторов. Точка  $A$  — центр области устойчивости; в этой точке  $\cos \mu_z = \cos \mu_r = 0$ .

и  $\psi^*(\theta)$ , величина  $b$  в (6,16) — начальное отклонение от равновесной орбиты на некотором азимуте  $\theta_i$  (элемент периодичности, в котором находится  $\theta_i$ , имеет номер  $m=0$ ),  $\gamma$  — угол между направлением начальной скорости и равновесной орбиты на азимуте  $\theta_i$ ,  $\gamma_{\text{опт}} = \frac{b}{2r_s} \left. \frac{d \ln \Psi(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_i}$  — так называемый оптимальный угол, характерный тем, что для частицы, впущенной под этим углом на азимуте  $\theta_i$ , амплитуда колебаний  $a(\theta)$  будет иметь минимальное значение (в слабофокусирующей круговой установке  $\gamma_{\text{опт}} \equiv 0$ ), угол  $\varepsilon_0$  — некоторая начальная фаза колебаний, зависящая только от начальных условий:

$$\varepsilon_0 = \arg \frac{b - i\Psi(\theta_i) r_s (\gamma - \gamma_{\text{опт}})}{\psi(\theta_i)}.$$

Нетрудно показать, что если бы дефокусирующие секторы отсутствовали, то (6,15) перешло бы в обычное выражение для гармонических колебаний, поскольку при этом  $\mu = \kappa_{\Phi} \nu$ ,  $\psi(\theta) = e^{i\kappa_{\Phi}\theta}$ ,  $\Psi(\theta) = \frac{1}{\kappa_{\Phi}}$ ,  $\gamma_{\text{опт}} = 0$ ,  $\theta = m\nu + \delta$ :

$$x = a \cos(\kappa_{\Phi}\theta + \varepsilon_0), \quad a = \sqrt{b^2 + \frac{r_s^2 \gamma^2}{\kappa_{\Phi}^2}}, \quad \varepsilon_0 = \arg \left[ \left( b - i \frac{r_s \gamma}{\kappa_{\Phi}} \right) e^{-i\kappa_{\Phi}\theta_i} \right]. \quad (6,18)$$

Кстати заметим, что выражения (6,6) переходят в этом случае соответственно в  $x_1 = e^{i\kappa_{\Phi}\theta}$  и  $x_2 = x_1^* = e^{-i\kappa_{\Phi}\theta}$ .

Запись решения в виде (6,15) является весьма удобной при исследовании многих вопросов, связанных с анализом свободных колебаний<sup>61</sup>. К ним относятся, например, такие вопросы, как выбор апертуры камеры ускорителя, проблема нахождения условий оптимальной инжекции и т. д. Зависящая от азимута в (6,16) амплитуда колебаний  $a(\theta)$  частицы с заданными начальными условиями определяет ту область камеры, которая может быть занята этой частицей в процессе колебаний. Отклонения частицы от равновесной орбиты на любом азимуте  $\theta$  будут меньше или равны по модулю  $a(\theta)$ , и в практически интересных случаях за большое число оборотов частица займет всю область, ограниченную кривыми  $x = \pm a(\theta)$ . Поэтому эти кривые называют часто огибающими траектории частицы. Форма огибающей определяется, очевидно, функцией  $\Psi(\theta)$ , имеющей максимум в середине фокусирующего сектора, минимум — в середине дефокусирующего сектора, и симметричной относительно этих экстремальных точек. Исходя из этого, легко понять фокусирующее действие совокупности секторов с чередующимися градиентами магнитного поля. Рассмотрим, например, наиболее типичный случай, когда  $n_+ = |n_-|$  и азимутальная протяженность положительных и отрицательных секторов одинакова. Поскольку огибающая имеет максимум в фокусирующих секторах, то частицы в этих секторах в процессе колебаний в среднем будут находиться дальше от равновесной орбиты, чем в дефокусирующих. Поэтому, несмотря на равенство  $n_+ = |n_-|$  и равные времена преобладать над дефокусировкой, так как эти силы пропорциональны отклонению от равновесной орбиты, и, следовательно, фокусирующие силы больше дефокусирующих. Для того чтобы дать оценку величины фокусировки в сильнофокусирующих ускорителях, положим в (6,16)  $b = 0$ . Тогда получим

$$a(\theta) = \gamma r_s \sqrt{\Psi(\theta) \Psi(\theta_i)}. \quad (6,19)$$

Принимая во внимание, что для слабофокусирующего ускорителя в аналогичном случае (см. (6,18))  $a = \frac{\gamma r_s}{\kappa}$ , для грубых оценок можно принять за

коэффициент улучшения фокусировки в сильнофокусирующем ускорителе, по сравнению с соответствующим слабофокусирующим, величину

$$y = \frac{\bar{a}}{a_{\max}} = \frac{1}{\Psi_{\max} x}, \quad (6,20)$$

где черта сверху приписывается величинам, относящимся к слабофокусирующему ускорителю. В простейшем случае, когда рабочая точка находится в центре области устойчивости,  $\Psi_{\max} = \frac{4,8}{x}$ , так что  $y \approx 0,2 \frac{x}{x}$ .

Например, сравнивая вертикальные движения при  $|n| = 400$ ,  $x = 20$ ,

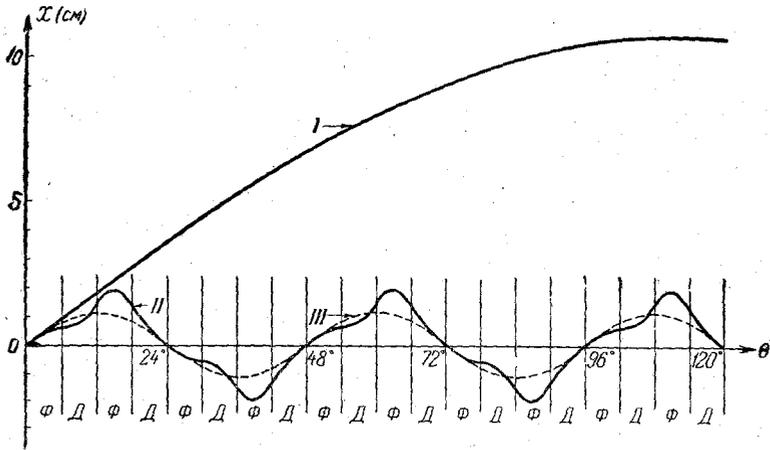


Рис. 15. Свободные колебания в сильнофокусирующем (кривая I) и в соответствующем слабофокусирующем (кривая II) ускорителях. Синусоида (кривая III) — «гладкое» приближение (синусоидальные колебания с частотой  $G = N\mu/2\pi$ ) для колебаний, даваемых кривой II. Буквой «ф» отмечены фокусирующие секторы, «д» — дефокусирующие. Окружность радиуса  $r_s$  развернута на прямую.

$N = 40$  и  $\bar{n} = \frac{2}{3}$ ,  $\bar{x} = 0,82$ , найдем  $y \approx 5$ ; для радиального движения в этом случае получим  $y \approx 7$ . Приведем еще один пример. При  $|n| = 225$ ,  $x = 15$ ,  $N = 30$  и  $\bar{n} = \frac{2}{3}$  будем иметь

$$y = \begin{cases} 3,7 & \text{для вертикального движения,} \\ 5,3 & \text{для радиального движения.} \end{cases}$$

На рис. 15 показаны свободные (вертикальные) колебания в сильнофокусирующем и соответствующем слабофокусирующем ускорителях при значениях параметров, указанных в последнем примере, и при  $r_s = 90$  м,  $\gamma = 10'$ ,  $\theta_i$  выбрано в начале фокусирующего сектора. В связи с тем, что  $\theta_i$  выбрано не в середине фокусирующего сектора, а на краю, улучшение фокусировки получается, как видно из рис. 15, не в 3,7 раза, а больше чем в 5 раз. Если  $\theta_i$  взять в середине дефокусирующего сектора, где  $\Psi(\theta)$  имеет минимум, то фокусировка будет еще лучше\*).

Свободные колебания в сильнофокусирующем ускорителе не являются, вообще говоря, периодическими (см. (6,15)). Однако нетрудно

\*) Эти результаты относятся, конечно, к случаю, когда в (6,16)  $b = 0$ . Если  $b \neq 0$ , то улучшение фокусировки также будет связано с тем, каково  $\theta_i$ , однако  $\theta_i$ , соответствующее «наилучшей» фокусировке, будет зависеть при этом от  $b$  и  $\gamma$ .

показать, что они квазипериодические, причем безразмерная частота колебаний (число квазиколебаний на одном обороте) равна

$$G = \frac{\mu}{\pi} = \frac{\mu N}{2\pi}. \quad (6,21)$$

В тех случаях, когда  $\mu = \frac{2\pi}{k}$ , где  $k$  — целое число, колебания будут строго периодическими и их число на обороте будет определяться той же формулой (6,21), что и в случае квазипериодических колебаний, т. е. при этом квазипериод совпадает с истинным периодом. В более общем случае, когда  $\mu = \frac{2\pi g}{k}$ , где  $g$  и  $k$  — целые числа, не имеющие общих делителей, число квазиколебаний в  $g$  раз больше числа строго повторяющихся колебаний.

Большое число колебаний за оборот в сильнофокусирующих ускорителях (например, для рассмотренных выше случаев при  $|n| = 400$ ,  $N = 40$  и  $|n| = 225$ ,  $N = 30$  имеем соответственно  $G = 10$  и  $G = 7,5$ ), обуславливающее хорошую фокусировку, приводит в то же время к необходимости очень точно выдерживать соответствие между расчетными и реальными значениями различных параметров. Дело в том, что при больших  $G$  малые отклонения от расчетных параметров ускорителя могут привести, например, к тому, что на одном обороте уложится целое число колебаний ( $G$  будет целым). Тогда даже при очень небольшом искажении поля амплитуда свободных колебаний будет возрастать, так как в этом случае движение частиц от оборота к обороту будет возмущаться в одной и той же фазе, т. е. возмущения будут накапливаться. Такой случай отвечает (см. § 3) простому резонансу. Наряду с простыми резонансами возможны и параметрические резонансы, которые осуществляются при целых и полуцелых  $G$ , т. е. в два раза чаще, чем простые. Эти резонансы, как и в слабофокусирующих ускорителях, проявляются при наличии возмущений в показателе спадания магнитного поля. Чем больше  $N$  и соответственно  $n_+$  и  $n_-$ , т. е. чем сильнее фокусировка, тем ближе на области устойчивости будут располагаться соседние линии и полосы резонансной неустойчивости, а следовательно, тем жестче станут допуски. Так, при  $\mu = \pi/2$  относительное изменение  $|n|$ , соответствующее «расстоянию» между соседними параметрическими резонансами, определяется формулой

$$\frac{\Delta |n|}{|n|} = \frac{4}{N \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}} \cong \frac{\pi}{N} = \nu. \quad \text{При } N = 40 \quad \frac{\Delta |n|}{|n|} = 0,08. \quad \text{Допуск же на } \frac{\Delta |n|}{|n|}$$

должен, очевидно, быть по крайней мере в несколько раз меньшим. Наряду с указанными резонансами в сильнофокусирующих ускорителях, как и в ускорителях со слабой фокусировкой, возможны резонансы связи радиальных и вертикальных колебаний, различные нелинейные резонансы, причем в сильнофокусирующих ускорителях этих резонансов будет значительно больше, чем в слабофокусирующих. Так, резонансы связи при  $G_r + G_z = k$ , где  $k$  — целое число, представляющие в ускорителях с сильной фокусировкой большую опасность, в слабофокусирующих ускорителях вообще не осуществляются. Наличие резонансов связи и нелинейных резонансов в случае сильной фокусировки делает допуски на  $|n|$  и на другие параметры еще более жесткими. Детальное рассмотрение резонансных явлений в ускорителях с сильной фокусировкой проведено в работах <sup>22, 43, 62</sup>.

Жесткость допусков на характеристики магнитного поля, на геометрические параметры магнита, на точность его сборки является очень

существенным недостатком сильнофокусирующих ускорителей. Однако трудности, возникающие при сооружении подобных установок, будут, по-видимому, преодолены, и сильная фокусировка позволит повысить практический предел энергии, достижимой в синхрофазотроне, еще в несколько раз.

Перейдем к рассмотрению особенностей автофазировки в сильнофокусирующем синхрофазотроне. Мгновенная орбита частицы с энергией, отличающейся от равновесной, в ускорителе с сильной фокусировкой уже не будет окружностью. При энергии частицы, большей равновесной, ее мгновенная орбита в случае возрастающего с радиусом поля

( $n < 0$ ), имела бы радиус, больший равновесного, а при убывающем (сильнее, чем  $\frac{1}{r}$ ) поле — меньший равновесного.

Ввиду того, что поле в одних секторах сильно возрастает, а в других резко убывает с радиусом, становится понятным, почему частица с энергией, отличной от равновесной, не может при этом двигаться по окружности. Замкнутые мгновенные орбиты для частиц с неравновесной энергией, около которых совершаются свободные колебания, имеют теперь более сложную форму. В простейшем случае ( $|n_-| = n_+$ ) в линейном приближении положение мгновенных орбит в фокусирующих и дефокусирующих секторах определяется формулами <sup>58, 22</sup>:

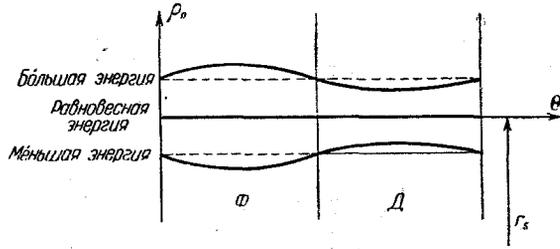


Рис. 16. Мгновенные орбиты частиц в сильнофокусирующем ускорителе.

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{r_s}{|n|} \frac{\Delta E}{E_s \beta_s^2} \left[ 1 + J \operatorname{sh} \frac{\kappa \nu_d}{2} \cos \kappa \left( \vartheta - \frac{\nu_\phi}{2} \right) \right] & \text{в фокусирующих секторах,} \\ \frac{r_s}{|n|} \frac{\Delta E}{E_s \beta_s^2} \left[ -1 + J \sin \frac{\kappa \nu_\phi}{2} \operatorname{ch} \kappa \left( \vartheta + \frac{\nu_d}{2} \right) \right] & \text{в дефокусирующих секторах,} \end{cases} \quad (6,22)$$

где  $\kappa = \sqrt{|n|}$ ,  $J = \frac{2}{\sin \frac{\kappa \nu_\phi}{2} \operatorname{ch} \frac{\kappa \nu_d}{2} - \cos \frac{\kappa \nu_\phi}{2} \operatorname{sh} \frac{\kappa \nu_d}{2}}$ . Форма мгновенных орбит

при  $|n_-| = n_+$  и  $\nu_\phi = \nu_d$  для частиц с энергиями, большей и меньшей равновесной, показана на рис. 16. Среднее магнитное поле вдоль пунктирных прямых линий, показанных на этом рисунке, одинаково и совпадает, в линейном приближении, с полем на равновесной орбите. Среднее же поле вдоль самих неравновесных мгновенных орбит отлично от поля на равновесной орбите и для частиц с энергией, превышающей равновесную, больше, чем для частиц с энергией, меньшей равновесной. Это нетрудно понять, если учесть формы этих орбит и то обстоятельство, что поле в фокусирующих по радиусу секторах нарастает с увеличением радиуса, а в дефокусирующих спадает.

Траекторий для частиц с большей энергией здесь, как и в ускорителях со слабой фокусировкой, длиннее, чем для частиц с меньшей энергией. В случае слабой фокусировки согласно (3,17в)

$$\frac{\rho}{r_s} = \frac{\Delta \Pi}{\Pi_s} = \alpha \frac{\Delta E}{E_s \beta_s^2}, \quad \alpha = \frac{1}{1-n}, \quad (6,23)$$

где  $\Pi$  — периметр орбиты и  $\Delta \Pi = \Pi - \Pi_s$ . В сильнофокусирующем ускорителе связь между относительным изменением периметра мгновенной

орбиты и отклонением энергии частицы от равновесной имеет тот же вид, но только  $\alpha$  выражается через параметры установки иначе. Для сильнофокусирующего ускорителя можно ввести эффективный показатель спадания магнитного поля  $n_{\text{эф}}$ , связанный с  $\alpha$  тем же соотношением, что и  $n$  в слабофокусирующих ускорителях

$$n_{\text{эф}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \quad (6,24)$$

Тогда (6,23) для сильной фокусировки будет иметь вид

$$\frac{\Delta H}{H_s} = \frac{1}{1 - n_{\text{эф}}} \frac{\Delta E}{E_s \beta_s^2}. \quad (6,25)$$

При  $|n_-| = n_+$ ,  $v_{\text{ф}} = v_d$  согласно (6,22) имеем

$$\alpha = \frac{4}{x^2 v} \frac{1}{\text{cth} \frac{xv}{2} - \text{ctg} \frac{xv}{2}}. \quad (6,26)$$

В центре области устойчивости это выражение сводится к  $\alpha = \frac{4,8}{|n|}$  и соответственно  $n_{\text{эф}} \approx 1 - 0,2|n|$ . Отсюда видно, что  $n_{\text{эф}}$  при больших  $|n|$  — большая отрицательная величина. Так, например, при  $|n| = 400$  имеем  $n_{\text{эф}} \approx -80$ . Поэтому изменение периметра орбиты в сильнофокусирующем ускорителе при отклонении энергии частицы от равновесной существенно меньше, чем в ускорителе со слабой фокусировкой.

Такое «уплотнение» орбит, как и уменьшение амплитуд свободных колебаний, позволяет в сильнофокусирующих ускорителях на большую энергию сократить радиальную и вертикальную апертуры магнитного зазора примерно на порядок по сравнению с эквивалентным гипотетическим ускорителем со слабой фокусировкой. Более сильное уменьшение апертуры зазора электромагнита привело бы к слишком жестким допускам на различные параметры и особенно на точность изготовления и сборки магнита.

Однако ввиду уплотнения орбит в сильнофокусирующих ускорителях появляется одна существенная трудность, обусловленная отсутствием автофазирующих свойств при некотором значении энергии. Для выяснения существа вопроса напомним некоторые закономерности, определяющие автофазировку в ускорителях со слабой фокусировкой. В этих ускорителях время обращения  $T_0$  частиц с энергией, превышающей равновесную, больше времени обращения  $T_s$  равновесной частицы и, наоборот, для частиц с меньшей энергией  $T_0 < T_s$ . Как уже отмечалось в § 2, это связано с тем, что изменение периметра орбиты оказывает на период обращения частицы более сильное влияние, чем изменение ее скорости. Поэтому устойчивой равновесной фазой в слабофокусирующих ускорителях является фаза  $\Phi_s > 0$ . В синхрофазотроне с сильной фокусировкой большая «плотность» орбит означает, что периметр орбиты мало меняется при отклонении энергии частицы от равновесной. Вследствие этого в той области энергий, когда скорость частиц еще заметно изменяется с изменением энергии, на периоде обращения неравновесных частиц больше будет сказываться отклонение скорости от равновесной, чем изменение периметра. В этом случае период обращения неравновесных частиц  $T_0$  с энергией  $E > E_s$  меньше равновесного периода  $T_s$  и, наоборот, при  $E < E_s$  период  $T_0 > T_s$ . Такому положению соответствует отрицательная равновесная фаза ( $\Phi_s < 0$ ). Действительно, рассматривая, например, последовательные прохождения ускоряющего промежутка частицами, имеющими энергию, несколько отличающуюся от равновесной, нетрудно убедиться, что при указанной связи  $\Delta T$  и  $\Delta E$  фазовые колебания будут происходить около  $\Phi_s < 0$ .

При больших релятивистских энергиях, когда скорость частиц очень близка к скорости света и, следовательно, практически не меняется, на период обращения неравновесных частиц будет влиять, в основном, лишь изменение периметра орбиты. Таким образом, связь между приращением периода и приращением энергии здесь такая же, как в ускорителях со слабой фокусировкой, т. е. при  $E > E_s$  период обращения  $T_0 > T_s$  и, наоборот, при  $E < E_s$  период  $T_0 < T_s$ . Устойчивой равновесной фазой в этом случае является фаза  $\Phi_s > 0$ .

Поскольку на первой стадии ускорения равновесная фаза  $\Phi_s < 0$ , а в области больших энергий  $\Phi_s > 0$ , то, очевидно, при некоторой энергии частиц будет наблюдаться перестройка фазовой устойчивости. При этой энергии, называемой критической ( $E_{кр}$ ), отклонение скорости и отклонение периметра будут такими, что их влияние на период обращения частиц взаимно скомпенсируется — период перестанет меняться при отклонении энергии частиц от равновесной, и фазовая устойчивость будет отсутствовать. При переходе через критическую энергию устойчивая равновесная фаза скачком меняется на  $2|\Phi_s|$  от значения  $\Phi_s < 0$  до значения  $\Phi_s > 0$ , так как  $\cos \Phi_s$ , определяемый только параметрами установки, остается примерно постоянным в течение всего цикла ускорения. Такая перестройка фазовой картины может сопровождаться значительными потерями частиц. Забегая несколько вперед, скажем, что величина критической энергии для сильнофокусирующих синхрофазотронов с практически приемлемыми параметрами лежит в области энергий 5—10 *Бэв*. Естественно поэтому искать способ эффективного перевода частиц через критическую энергию. Авторы сильнофокусирующего синхрофазотрона <sup>49</sup> предложили изменять скачком в районе  $E_{кр}$  фазу ускоряющего напряжения на  $2|\Phi_s|$  таким образом, чтобы после критической энергии фаза  $\Phi_s > 0$  оказалась на месте фазы  $\Phi_s < 0$ . Теоретические исследования, проведенные в работах А. А. Коломенского и Л. Л. Сабсовича <sup>63</sup>, Ионсена <sup>64</sup>, Л. Л. Гольдина и Д. Г. Кошкарева <sup>65</sup>, а также опыты Боденштедта <sup>66</sup> на механической модели показали, что указанный метод позволяет перевести достаточное число частиц через критическую энергию, если в районе  $E_{кр}$  очень точно поддерживать заданный закон изменения частоты ускоряющего напряжения.

Можно показать, что радиально-фазовое движение в сильнофокусирующем синхрофазотроне описывается теми же уравнениями (3,17), что и в ускорителях со слабой фокусировкой, только в них нужно заменить  $n$  на  $n_{эф}$ ,  $\rho$  — на  $\bar{\rho} = \frac{\Delta\Pi}{2\pi}$ , а  $r_s$  — на  $\bar{r} = \frac{\Pi_s}{2\pi}$ . (Когда равновесная орбита является окружностью, т. е. в рассматриваемых нами до сих пор случаях,

$r = r_s$ ,  $\bar{\rho} = \rho_{ср}$ , где  $\rho_{ср} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \rho_0(\theta) d\theta$ .) Производя указанную замену

в уравнениях (3,17), получим следующие уравнения для малых фазовых колебаний в сильнофокусирующем ускорителе:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d}{dt} \left( \frac{E_s}{qK_s\omega_s} \dot{\eta} \right) + \frac{eV_0}{2\pi} \sin \Phi_s \cdot \eta &= 0, \\ \text{б) } \frac{\dot{\rho}}{r} &= \frac{1}{(1-n_{эф})\beta_s^2 K_s q\omega_s} \dot{\eta}, \\ \text{в) } K_s \frac{\Delta E}{E_s} &= \frac{\dot{\eta}}{q\omega_s}, \end{aligned} \right\} (6,27)$$

где  $\frac{\dot{\eta}}{q} = -(\omega_0 - \omega_s)$ ,  $K_s = 1 + \frac{n_{эф}}{1-n_{эф}} \frac{1}{\beta_s^2}$ . «Перескок» устойчивой равновесной фазы и исчезновение автофазирующих свойств в районе критиче-

ской энергии связаны математически с изменением знака  $K_s$  при переходе через  $E_{кр}$ . Действительно, так как  $n_{эф} \ll 0$ , то при сравнительно малых  $\beta_s$  величина  $K_s$  отрицательна, и согласно (6,27а) устойчивой равновесной фазой будет  $\Phi_s < 0$ . Наоборот, при  $\beta_s \approx 1$  ( $\beta_s^2 > -\frac{n_{эф}}{1-n_{эф}}$ ) величина  $K_s > 0$ , и устойчивая равновесная фаза  $\Phi_s$  положительна. Значению  $K_s = 0$  ( $\beta_s^2 = -\frac{n_{эф}}{1-n_{эф}}$ ) соответствует  $E = E_{кр}$ . Отсюда

$$E_{кр} = E_0 \sqrt{1 - n_{эф}} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha}}. \quad (6,28)$$

Например, в случае центра области устойчивости и при  $|n| = 400$  критическая энергия для притонов равна 8,4 Бэв. Учитывая указанное поведение  $K_s$ , из уравнения (6,27в) непосредственно получим, что связь между приращением энергии и приращением периода обращения неравновесных частиц ( $\frac{T_0 - T_s}{T_s} = -\frac{\omega_0 - \omega_s}{\omega_s} = \frac{\eta}{q\omega_s}$ ) до и после критической энергии будет именно такой, которая получена из качественных соображений.

Рассмотрим теперь фазовые колебания в окрестности критической энергии. Для описания поведения фазы при приближении к этому значению энергии можно воспользоваться линеаризованным уравнением (6,27а), поскольку ввиду затухания фазовых колебаний их амплитуда при подходе к  $E_{кр}$  ( $E_{кр} \gg E_i$ , где  $E_i$  — энергия инжекции) будет достаточно малой. Исходя из (6,27а), нетрудно показать, что вблизи критической энергии затухание фазовых колебаний усиливается. Это связано с резким возрастанием «эффективной массы»  $M = \frac{E_s}{q|K_s|\omega_s^2}$  из-за приближения  $K_s$  к нулю. Действительно, используя метод адиабатического инварианта (конечно, в той области, где он применим, т. е. исключая из рассмотрения самую ближайшую окрестность  $E_{кр}$ ), находим, что амплитуда фазовых колебаний  $a_\eta$ , описываемых уравнением (6,27а), затухает пропорционально  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ . При достаточно больших  $M$  амплитуда будет очень малой. Частота фазовых колебаний

$$\Omega = \omega_s \sqrt{\frac{qeV_0|K_s|\sin|\Phi_s|}{2\pi E_s}} = \sqrt{\frac{eV_0 \sin|\Phi_s|}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (6,29)$$

при подходе к критической энергии тоже сильно уменьшается. Таким образом, при энергии, несколько меньшей  $E_{кр}$ , фазы частиц совершают очень медленные колебания с малой амплитудой около  $\Phi_s < 0$ . В ближайшей окрестности  $E_{кр}$  (где адиабатическое приближение несправедливо) фаза частицы, как показывает строгий анализ<sup>63</sup>, почти не меняется, а при  $E = E_{кр}$  вообще останавливается ( $\left. \frac{d\eta}{dt} \right|_{E=E_{кр}} = 0$ ). Если осуществить переброс фазы ускоряющего напряжения в районе  $E = E_{кр}$ , то частицы, тесно сгруппированные до критической энергии около устойчивой фазы  $\Phi_s < 0$ , окажутся, очевидно, после прохождения критической энергии сгруппированными около новой устойчивой фазы  $\Phi_s > 0$ . Через некоторое время после прохождения  $E_{кр}$ , амплитуды фазовых колебаний, происходящих теперь около  $\Phi_s > 0$ , и частота этих колебаний начнут сильно увеличиваться, так как  $K_s$  будет резко расти, а «масса» соответственно уменьшаться. Возрастание амплитуды и частоты фазовых колебаний будет продолжаться до тех пор, пока энергия частиц не станет равной  $\sqrt{3}E_{кр}$ , а затем амплитуда и частота этих колебаний начнут медленно убывать.

Последнее связано с тем, что при  $E = \sqrt{3} E_{кр}$  «масса» достигает минимума, после чего начинает слабо нарастать. Количественные оценки показывают, что максимальные значения амплитуд фазовых колебаний при  $E = \sqrt{3} E_{кр}$  являются вполне допустимыми <sup>64</sup>.

Если бы переброс фазы ускоряющего напряжения при  $E = E_{кр}$  не был сделан, то частицы после перехода через  $E_{кр}$ , будучи сгруппированными около уже неустойчивой фазы  $\Phi_s < 0$ , либо не захватились бы в новую область устойчивости, отвечающую устойчивой фазе  $\Phi_s > 0$ , либо, начав двигаться вблизи границы этой области, из-за дальнейшей раскачки фазовых колебаний вышли бы из нее примерно за один обход фазы около  $\Phi_s > 0$ . Необходимость переброса фазы ускоряющего напряжения становится, таким образом, очевидной.

Амплитуда радиальных колебаний при подходе к критической энергии резко нарастает, достигает максимума при  $E_{кр}$ , а затем, если переброс фазы осуществлен, столь же резко спадает. Такое поведение амплитуды радиальных колебаний нетрудно понять, если рассмотреть область, не очень близкую к  $E_{кр}$ , где изменение параметров можно считать еще адиабатическим. Учитывая, что амплитудное значение  $\eta$  пропорционально

$$\Omega a_\eta \sim \frac{1}{M^{3/4}} \text{ и } K_s \sim M, \text{ из уравнения (6,276) находим } a_\rho \sim M^{1/4}, \text{ где } a_\rho -$$

амплитуда радиальных колебаний. Поскольку при подходе к  $E_{кр}$  «масса»  $M$  сильно растет, а после  $E_{кр}$  убывает, то из последнего соотношения следует указанный выше характер изменения амплитуды радиальных колебаний в районе  $E_{кр}$ . Детальное рассмотрение, проведенное в работах, посвященных прохождению через критическую энергию <sup>63, 64</sup>, показывает, что хотя наибольшая амплитуда радиальных колебаний около  $E_{кр}$  значительно превосходит амплитуду этих колебаний до критической энергии, однако она обычно оказывается меньшей соответствующей амплитуды при инжекции. Поэтому раскачка радиальных колебаний при  $E \sim E_{кр}$  не представляет по-видимому, большой опасности.

Из описанного поведения ускоряемых частиц в окрестности  $E_{кр}$  напрашивается вывод о сравнительной легкости перевода частиц через критическую энергию путем изменения фазы ускоряющего напряжения на  $2|\Phi_s|$  вблизи этого значения энергии. В пользу этого говорит также и тот факт, что требуемая точность, с которой должен быть выдержан момент сдвига фазы, не является слишком высокой ввиду медленности изменения фазы частиц в окрестности  $E_{кр}$ . Однако указанный вывод был бы правильным, если бы все параметры ускорителя точно соответствовали их расчетным значениям, т. е. если ускоритель был бы идеальным. В реальной же установке всегда, очевидно, имеются некоторые отклонения параметров от расчетных значений. Из-за ослабления автофазировки в районе критической энергии и ее отсутствия при  $E = E_{кр}$  эти отклонения могут существенно изменить или даже нарушить режим ускорения. Небольшое возмущение в частоте ускоряющего напряжения, вполне допустимое вдали от критической энергии, может привести в районе критической энергии к значительной или даже полной потере частиц. При наличии ошибки в частоте  $\Delta\omega$  уравнение (6,276) будет иметь вид

$$\frac{\bar{\rho}}{r} = \frac{1}{(1 - n_{эф}) \beta_s^2 K_s} \frac{\eta - \Delta\omega}{\omega}. \tag{6,30}$$

Из уравнения (6,30) следует, что чем ближе энергия к критической (чем меньше  $K_s$ ), тем к большим радиальным смещениям частиц приводит данное  $\Delta\omega$ . Строгий анализ <sup>63</sup> показывает, что для нормальной

работы сильнофокусирующих синхрофазотронов на 20—40 *Бэв* необходимо возмущение  $\frac{\Delta\omega}{\omega}$  ограничить в критической области величиной порядка  $10^{-6}$ . Такой допуск является очень жестким, но, по-видимому, выполнимым.

Следует отметить, что переброс фазы ускоряющего напряжения— не единственный способ прохождения через критическую энергию. Можно, например, на время прохождения через критическую энергию выключить ускоряющее напряжение и осуществлять ускорение в бетатронном режиме специально созданным вихревым электрическим полем<sup>63</sup>. Имеются также способы, позволяющие вообще устранить критическую энергию. А. А. Коломенский, В. А. Петухов и М. С. Рабинович<sup>67</sup> предложили вариант сильнофокусирующего ускорителя— «кольцевой фазотрон», в котором критическая энергия может вовсе отсутствовать. Не вдаваясь здесь в детали этого предложения отметим только, что устранение критической энергии в этом варианте достигается благодаря тому, что магнитная система составляется из секторов с чередующимися направлениями магнитных полей. Введение в магнитную систему сильнофокусирующего синхрофазотрона участков с полем, направленным в сторону, противоположную основному полю, также, оказывается, позволяет устранить критическую энергию. На это обстоятельство обратили, в частности, внимание авторы кольцевого фазотрона<sup>67</sup>.

В настоящее время предложено несколько вариантов сильнофокусирующего синхрофазотрона без критической энергии, основанных на этом методе. Сущность метода заключается в следующем. Вводя секторы с обратным полем, изменяющим формы и длины орбит частиц, добиваются такого положения, при котором периметры мгновенных орбит, отвечающих энергии, превышающей равновесную, были бы меньше или равны периметру равновесной орбиты, и, наоборот, мгновенные орбиты частиц с энергией, меньшей чем равновесная, оказались бы длиннее равновесной орбиты или имели бы ту же длину. Тогда при любой энергии  $E_s$  период обращения неравновесных частиц, энергия которых  $E > E_s$  будет меньше равновесного, а для частиц с  $E < E_s$ , наоборот, больше равновесного. В этом случае  $K_s$  всегда меньше нуля, критическая энергия отсутствует и устойчивой равновесной фазой в течение всего времени ускорения является  $\Phi_s < 0$ .

Введение секторов с обратным полем приводит, конечно, к увеличению периметра установки, так как равновесная орбита в секторах с обратным полем «стремится уйти» от центра машины. Поскольку из экономических соображений увеличение периметра нежелательно, важно найти такие условия, при которых удлинение периметра было бы небольшим. В связи с этим особого внимания заслуживает предложение В. В. Владимировского и Е. К. Тарасова<sup>63</sup>, положенное в основу проектов ускорителей на 6—7 *Бэв*<sup>56</sup> и 50—60 *Бэв*<sup>55</sup>. Они обратили внимание на то, что если магниты с обратным направлением поля разместить вдоль орбиты частиц с периодом, близким к периоду радиальных свободных колебаний, то даже при сравнительно небольшой суммарной длине участков с обратным полем орбиты неравновесных частиц могут быть существенно искажены. Такое «резонансное» расположение участков с обратным полем позволяет устранить критическую энергию при сравнительно небольшом увеличении периметра установки. В отличие от других вариантов, в которых длина равновесной орбиты увеличивается в 1,5—2,5 раза, в этом варианте она увеличивается всего лишь на 15—20%.

В 1953 г. А. А. Коломенский, В. А. Петухов и М. С. Рабинович предложили интересную модификацию сильнофокусирующего ускорителя—

кольцевой фазотрон<sup>67</sup>. В 1955 г. аналогичное предложение было сделано Саймоном<sup>69</sup>. Этими авторами было подмечено, что, используя принцип сильной фокусировки, можно осуществить ускоритель с постоянным во времени магнитным полем наподобие фазотрона, но не со сплошным магнитом, а с магнитом, выполненным в виде сравнительно узкого кольца. Применение постоянного магнитного поля имеет большие преимущества: существенно упрощается схема питания и технология изготовления магнита, отпадает необходимость согласования частоты ускоряющего электрического поля с магнитным и, что особенно важно, повышается эффективность работы установки. Последнее объясняется тем, что частота повторения ускоренных порций частиц определяется здесь периодом модуляции частоты ускоряющего напряжения, который может быть сделан значительно меньше, чем длительность циклов воспроизведения магнитного поля в синхрофазотронах.

Магнит кольцевого фазотрона, так же как и синхрофазотрона с сильной фокусировкой, составляется из отдельных секций с резко меняющимся в них магнитным полем. Однако, в отличие от синхрофазотрона, поля в соседних секторах имеют противоположное направление, а по абсолютной величине во всех секторах резко нарастают (например, от 200 гаусс до 20 тыс. гаусс) в одну сторону—либо от центра магнитной системы, либо к ее центру. Благодаря такой конфигурации поля удается, с одной стороны, сосредоточить в узком кольце орбиты частицы как с малой, так и с очень большой энергией, а с другой стороны, обеспечить устойчивость движения по этим орбитам.

Если рассматривать магнитное поле относительно центров кривизны траекторий (см. рис. 17), то оно в соседних секторах имеет различные по знаку показатели спадания  $n$ , т. е. в этой установке, так же как и в сильно-фокусирующем синхрофазотроне, частицы испытывают по каждому из двух направлений (радиальному и вертикальному) попеременно то фокусировку, то дефокусировку. Для того чтобы обеспечить хорошую суммарную фокусировку в обоих направлениях, необходимо выбирать азимутальный размер обратных секторов (секторов с отрицательной кривизной траекторий) не сильно отличающимся от размера прямых секторов (секторов с положительной кривизной траекторий). Ввиду этого радиус установки оказывается в практических случаях значительно больше (в 3—6 раз), чем радиус соответствующего ускорителя без секторов с обратным полем. Большая величина коэффициента увеличения установки (отношение радиуса установки к наименьшему радиусу кривизны траекторий в секторах) является неизбежным недостатком такого кольцевого фазотрона.

Существенным для нормальной работы кольцевых фазотронов является постоянство чисел бетатронных колебаний,  $G_r$  и  $G_z$ , укладываемых на одном обороте, при любой энергии частиц. Если бы эти числа не были постоянными, то имелась бы опасность совпадения их на некоторых орбитах с резонансными значениями, чего, конечно, следует избегать. В простейших случаях постоянству чисел свободных колебаний на обороте

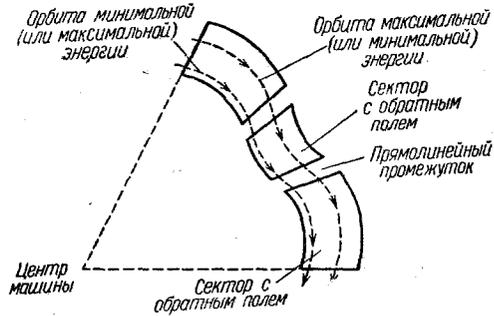


Рис. 17. Пример магнитной системы кольцевого фазотрона. Мгновенные орбиты, составленные из дуг окружностей в секторах и отрезков прямых в промежутках, подобны с центром подобия в центре ускорителя. Центры дуг окружностей в каждом из секторов не совпадают между собой.

отвечает такая конфигурация магнитного поля, когда орбиты частиц разных энергий подобны между собой. Как показано в работах <sup>70, 22</sup>, магнитное поле при этом должно иметь следующий вид:

$$B_z = B_0(\theta) \left( \frac{r}{r_0} \right)^k, \quad (6,31)$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из центра машины,  $r_0$  — некоторый фиксированный радиус,  $\theta = \frac{l}{r} \left( l - \text{текущая длина вдоль орбиты, } \bar{r} = \frac{r}{2\pi} \right)$ ,  $k = \text{const}$ . В зависимости от знака  $k$  различают два варианта кольцевого фазотрона — прямой и обращенный. В прямом варианте  $k > 0$ , и поле нарастает (по абсолютной величине) при увеличении расстояния от центра установки. В обращенном варианте  $k < 0$ , и поле соответственно нарастает к центру установки.

Замечательным свойством обращенного варианта кольцевого фазотрона является то, что в нем вообще отсутствует критическая энергия. В этом варианте мгновенная орбита при приращении энергии сворачивается внутрь, и периметр ее уменьшается ( $\lambda < 0$ ). Ввиду этого при любой энергии  $E_s$  приращение энергии приводит к уменьшению периода обращения, и устойчивой равновесной фазой все время является фаза  $\Phi_s < 0$  (соответственно  $K_s$  сохраняет свой знак,  $K_s < 0$ ). Различные вопросы теории кольцевого фазотрона рассмотрены в ряде работ <sup>67, 71, 22, 70</sup>.

Введение секторов с обратным полем — не единственный способ осуществления кольцевого фазотрона. Другим вариантом подобной установки является ускоритель, предложенный Керстом, Тервиллигером и другими <sup>70, 72</sup>, имеющий так называемые «спиральные» секторы. В этом варианте магнитное поле состоит из двух частей: из поля, увеличивающегося по радиусу и не зависящего от азимута, и поля, также увеличивающегося с радиусом, но периодического по азимуту. Гребни (максимумы) и впадины (минимумы) периодического поля образуют спирали, составляющие малый угол с орбитой. Частицы, пересекая гребни и впадины под малым углом, испытывают сильную фокусировку, так как подвергаются действию градиента то одного, то другого знака. Ввиду отсутствия участков с обратным полем в ускорителе со «спиральными» секторами коэффициент увеличения установки близок к единице, что является существенным его преимуществом перед рассмотренным ранее кольцевым фазотроном с «радиальными» секторами. В то же время создание спирального магнитного поля представляет очень сложную техническую задачу.

Идеи использования сильной фокусировки в ускорителях с постоянным магнитным полем оказались весьма плодотворными. В частности, они вновь возродили циклотрон с азимутальной вариацией магнитного поля, предложенный еще в 1938 г. Томасом <sup>73</sup> \*). Осуществляя в циклотроне азимутальную вариацию магнитного поля за счет введения секторов особой конфигурации с однородными, но разными по абсолютной величине полями <sup>75, 76</sup>, или создавая спиральное поле <sup>70, 77</sup>, такое же как в кольцевом фазотроне, удается обеспечить постоянство периода обращения частиц вплоть до энергии  $E = E_0$  при одновременной хорошей радиальной и вертикальной фокусировке.

Для проверки идеи использования сильной фокусировки в постоянном магнитном поле была построена модель ускорителя с радиальными секторами <sup>78, 79</sup>, в которой ускоряются электроны до энергий 400 кэВ

\*) В настоящее время построены модели циклотронов с азимутальной вариацией магнитного поля, на которых ускоряются электроны до скорости  $v = \frac{c}{2}$  <sup>74</sup>.

индукционным методом. Результаты экспериментов, проведенных на этой модели по изучению колебаний и резонансных явлений со свободными колебаниями, хорошо согласуются с теоретическими расчетами. Исследования в этом направлении в настоящее время приобретают все больший размах. Безусловно, они принесут много интересного в области ускорительной техники.

В последние годы предложен ряд принципиально новых методов ускорения заряженных частиц<sup>80, 81</sup>, а также обсуждается идея создания сталкивающихся пучков<sup>82, 83, 84</sup>. Однако круг этих вопросов выходит за рамки настоящего обзора, и поэтому мы не будем на них останавливаться.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Терлецкий, Релятивистская задача о движении электрона в переменном магнитном поле с осевой симметрией, ЖЭТФ 11, 96 (1941).
2. D. W. Kerst, R. Serber, Electronic orbits in the induction accelerator, Phys. Rev. 60, 53 (1941).
3. В. И. Векслер, Новый метод ускорения релятивистских частиц, ДАН СССР 43, 346 (1944).
4. В. И. Векслер, О новом методе ускорения релятивистских частиц, ДАН СССР 44, 393 (1944).
5. V. Veksler, A new method of acceleration of relativistic particles, Journ. of Phys. USSR 9, 153 (1945).
6. E. M. McMillan, The synchrotron, a proposed high energy particle accelerator, Phys. Rev. 68, 143 (1945).
7. Я. Хургин, О верхнем пределе энергии ионов, могущих быть полученными при помощи циклотрона, ДАН СССР 19, 237 (1938).
8. Д. В. Ефремов, М. Г. Мещеряков, А. Л. Минци др., Шестиметровый синхроциклотрон Института ядерных проблем АН СССР, Атомная энергия 4, 5 (1956).
9. В. И. Векслер, Д. В. Ефремов, А. Л. Минци др., Синхрофазотрон на энергию 10 Бэв АН СССР, Атомная энергия 4, 22 (1956).
10. M. Rabinovich, Investigation of the phasing properties of the relativistic resonance accelerators. I Synchrotron, Journ. of Phys. USSR 10, 523 (1946).
11. M. Rabinovich, Investigation of the phasing properties of the relativistic resonance accelerators. II Cyclotron with varying frequency of dee voltage (phasotron), Journ. of Phys. USSR 10, 530 (1946).
12. М. С. Рабинович, Теория современных резонансных ускорителей, Диссертация, Москва, ФИАН СССР (1948).
13. N. H. Frank, Stability of electron orbits in the synchrotron, Phys. Rev. 70, 177 (1946) (см. перевод в сборнике «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц», ИЛ, Москва (1950)).
14. L. L. Foldy, D. Bohm, Theory of the synchrotron, Phys. Rev. 70, 249 (1946).
15. D. Bohm, L. L. Foldy, Theory of the synchrocyclotron, Phys. Rev. 72, 649 (1947) (см. перевод в сборнике «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц», ИЛ, Москва (1950)).
16. Д. Д. Иваненко, И. Я. Померанчук, О максимальной энергии, достижимой в бетатроне, ДАН СССР 44, 343 (1944).
17. Л. Арцимович, И. Я. Померанчук, Излучение быстрых электронов в магнитном поле, ЖЭТФ 16, 379 (1946).
18. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, О влиянии излучения на движение релятивистского электрона в магнитном поле, ДАН СССР 106, 807 (1956).
19. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, О роли радиационных потерь в циклических ускорителях, ЖЭТФ 30, 1161 (1956).
20. А. А. Соколов, И. М. Тернов, К квантовой теории светящегося электрона IV, ЖЭТФ 28, 431 (1955); см. также ДАН СССР 97, 823 (1954).
21. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, О влиянии квантовых флуктуаций излучения на траекторию электрона в магнитном поле, ЖЭТФ 30, 205 (1956). The effect of radiation on the motion of relativistic electrons in a synchrotron, CERN, Symposium, 447 (1956).
22. А. А. Коломенский, Исследования по теории движения частиц в современных циклических ускорителях, Диссертация, Москва, ФИАН СССР (1957).
23. Е. М. Мороз, К вопросу о влиянии квантовых флуктуаций излучения электронов на синхротронные колебания, ЖЭТФ (в печати).

24. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович, О допустимой кратности частоты в синхротронах, Атомная энергия (в печати).
25. А. Н. Диденко, О влиянии квантового характера излучения на радиально-фазовые колебания в электронных циклических ускорителях на большие энергии, ЖТФ 37, 1624 (1957).
26. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Методы подавления бетатронных колебаний в сильнофокусирующих электронных синхротронах, ПТЭ, № 1, 22 (1957).
27. А. А. Коломенский, О возбуждении синхротронных колебаний вследствие флуктуации излучения электронов в ускорителе с сильной фокусировкой, ЖЭТФ 30, 207 (1956).
28. J. R. Richardson and all, Development of the frequency modulated cyclotron, Phys. Rev. 73, 424 (1948).
29. Э. Л. Бурштейн, В. И. Векслер, А. А. Коломенский, Стохастический метод ускорения частиц, Сборник «Некоторые вопросы теории циклических ускорителей», изд. АН СССР (1955).
30. J. L. Tuck, L. C. Teng, Regenerative deflector for synchrocyclotron, Phys. Rev. 81, 305 (1951).
31. K. J. Le Couteur, The regenerative deflector for synchrocyclotron, Proc. Phys. Soc. B64, 1073 (1951) (см. также перевод в журнале «Проблемы современной физики», вып. 4, 24 (1956)).
32. В. П. Дмитриевский, Пространственная устойчивость частиц в циклических ускорителях, Диссертация, Институт ядерных проблем АН СССР (1953).
33. В. П. Дмитриевский, В. И. Данилов, Ю. Н. Денисов и др., Вывод пучка протонов из шестиметрового синхроциклотрона посредством возбуждения радиальных колебаний, ПТЭ, № 1, 11 (1957).
34. A. V. Grewe, K. J. Le Couteur, Extracted proton beam of the Liverpool 156-inch cyclotron, Rev. Sci. Instr. 26, 725 (1955) (см. также перевод в журнале «Проблемы современной физики», вып. 43, 35 (1956)).
35. A. V. Grewe, J. W. G. Gregory, The extraction of the beam from the Liverpool synchrocyclotron. II Experimental work, Proc. Roy. Soc. A232, 242 (1955).
36. В. И. Векслер, А. А. Коломенский, В. А. Петухов, М. С. Рабинович, Физические основы сооружения синхрофазотрона на 10 Бэв (Доклад на Всесоюзной конференции по физике частиц высокой энергии, Москва, 1956).
37. М. С. Рабинович, Основы теории синхрофазотрона с разрезным магнитом, Диссертация, Москва, ФИАН СССР (1952).
38. М. С. Рабинович, Некоторые вопросы теории синхрофазотрона АН СССР на 10 Бэв, Атомная энергия 5, 431 (1957).
39. N. M. Blachman, Synchrotron—oscillation resonance, Rev. Sci. Instr. 21, 908 (1950) (см. перевод в журнале «Проблемы современной физики», II (1952)).
40. И. С. Данилкин, М. С. Рабинович, Резонансные возмущения синхротронных колебаний в ускорителях заряженных частиц, ЖТФ 27, 1558 (1957).
41. В. И. Котов, Н. Б. Рубин, Собственные функции уравнения свободных колебаний слабофокусирующего ускорителя с разрезным магнитом и их применение, ЖТФ 28, вып. 2 (1958).
42. N. M. Blachman, Forced betatron oscillation in a synchrotron with straight sections, Rev. Sci. Instr. 22, 569 (1951) (см. также перевод в журнале «Проблемы современной физики», II (1952)).
43. А. А. Коломенский, К теории бетатронных колебаний частиц в магнитных системах, I, II, ЖТФ 26, 1969 (1956).
44. А. А. Коломенский, Теория кратного резонансного ускорителя (микротрона), Диссертация, Москва, ФИАН СССР (1950).
45. W. J. Henderson, H. Le Caine, R. Montalbetti, A magnetic resonance accelerator for electrons, Nat. 162, 699 (1948).
46. Е. М. Мороз, О некоторых смягченных режимах ускорения электронов в микротроне, ДАН СССР 106, 986 (1956).
47. Е. М. Мороз, О новых возможностях повышения эффективности ускорителей заряженных частиц, ДАН СССР 115, 78 (1957).
48. В. В. Владимирский, Распространение радиоволн вдоль цепочки цилиндрических эндовибраторов, ЖТФ 17, 1269 (1947).
49. E. D. Courant, M. S. Livingston, H. S. Snyder, The strong-focusing synchrotron—a new high energy accelerator, Phys. Rev. 88, 1190 (1952) (см. также перевод в журнале «Проблемы современной физики», в п. 11, 169 (1954)).
50. В. В. Владимирский, Вариант жесткой фокусировки в линейном ускорителе, ПТЭ, № 3, 35 (1956).

51. К. Н. Степанов, А. А. Шаршанов, Сильная фокусировка в линейных электронных ускорителях, ЖЭФ 27, 1863 (1957).
52. А. Д. Власов, Теория знакопеременной (сильной) фокусировки в линейных ускорителях (Доклад на Всесоюзной конференции по физике частиц высокой энергии, Москва, 1956).
53. M. Chodogow, E. L. Ginzton, W. W. Hansen, R. L. Kuhl, R. B. Neal, W. K. H. Panofsky and all, Stanford High—Energy Linear Electron Accelerator (Mark III), Rev. Sci. Instr. 26, 134 (1955).
54. L. W. Alvarez, H. Bradner, J. V. Frank and all, Berkeley proton linear accelerator, Rev. Sci. Instr. 26, 144 (1955) (см. также перевод в журнале «Проблемы современной физики», вып. 4, 99 (1956)).
55. В. В. Владимирский, Е. Г. Комар, А. Л. Минцидр., Основные характеристики проектируемого ускорителя протонов на 50—60 Бэв с жесткой фокусировкой, Атомная энергия 4, 31 (1956).
56. В. В. Владимирский, Е. Г. Комар, А. Л. Минцидр., Проект кольцевого ускорителя протонов на 6—7 Бэв (Доклад на Всесоюзной конференции по физике частиц высокой энергии, Москва, 1956).
57. А. А. Коломенский, М. С. Рабинович, О новом ускорителе на большие энергии, Москва, Отчет ФИАН, РФ-62 (1952).
58. М. С. Рабинович, Теоретическое исследование ускорителя с переменным показателем магнитного поля, Москва, Отчет ФИАН (1953).
59. В. В. Владимирский, Е. К. Тарасов, Линейная теория бетатронных колебаний частиц в ускорителе с жесткой фокусировкой (Доклад на Всесоюзной конференции по физике частиц высокой энергии, Москва, 1956).
60. Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, Москва (1953).
61. А. М. Балдин, В. В. Михайлов, М. С. Рабинович, Метод огибающих для исследования свободных колебаний в ускорителях, ЖЭФ 31, 993 (1956).
62. Ю. Ф. Орлов, Нелинейная теория бетатронных колебаний в синхротроне с жесткой фокусировкой, ЖЭФ 32, 316 (1957).
63. А. А. Коломенский, Л. Л. Сабсович, О прохождении через критическую энергию в ускорителе с сильной фокусировкой, ЖЭФ 26, 576 (1956).
64. K. Johnson, Phase oscillations and transition—energy problems (Доклад на конференции, посвященной синхрофазотрону с сильной фокусировкой, проходившей в Институте физики Женевского университета в октябре 1953 г.).
65. Л. Л. Гольдин, Д. Г. Кошкарев, Синхротронные колебания в ускорителе с жесткой фокусировкой, ЖЭФ 31, 803 (1956).
66. E. Vodenstedt, Über die Phasenschwingungen beim Synchrotron mit starker Fokussierung, Ann. Phys. 15, 35 (1954).
67. А. А. Коломенский, В. А. Петухов, М. С. Рабинович, Новый ускоритель заряженных частиц—кольцевой фазотрон. (Сборник «Некоторые вопросы теории циклических ускорителей», изд. АН СССР, Москва (1955), см. также ПТЭ, № 2, 26 (1956).)
68. В. В. Владимирский, Е. К. Тарасов, О возможности устранения критической энергии в ускорителе с жесткой фокусировкой. (Сборник «Некоторые вопросы теории циклических ускорителей», изд. АН СССР, Москва (1955).)
69. K. R. Symon, Fixed field alternating gradient accelerators, Phys. Rev. 98, 1152 (1955).
70. K. R. Symon, D. W. Kerst and all, Fixed field alternating gradient particle accelerators, Phys. Rev. 103, 1837 (1956) (см. также перевод в УФН, LXI, 613 (1957)).
71. А. К. Бурцев, А. А. Коломенский, К теории кольцевого фазотрона, ПТЭ, № 2, 11 (1957).
72. D. W. Kerst, K. M. Terwilliger and all, Fixed field alternating gradient accelerator with spirally ridged poles, Phys. Rev. 98, 1153 (1955).
73. L. H. Thomas, The paths of ions in the cyclotron. II. Paths in the combined electric and magnetic fields, Phys. Rev. 54, 588 (1938).
74. E. L. Kelly, R. V. Pyie, R. L. Thornton and all, Two electron models of a constant—frequency relativistic cyclotron, Rev. Sci. Instr. 27, 493 (1956).
75. Е. М. Мороз, Циклотрон с разрезным магнитом, ДАН СССР 108, 436 (1956).
76. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович, О повышении предельной энергии и улучшении фокусировки в циклотроне, ПТЭ, № 1, 15 (1957).
77. K. M. Terwilliger and all, Application of the fixed field alternating gradient principle to betatrons and cyclotrons, Phys. Rev. 98, 1153 (1955).
78. L. W. Jones, K. M. Terwilliger, Experimental test of the fixed field alternating gradient principle of particle accelerator design, Rev. Sci. Instr. 27, 651 (1956).

79. F. T. Cole, R. O. Hooby, L. W. Jones and all, Electron model fixed field alternating gradient accelerator, Rev. Sci. Instr. 28, 403 (1957).
  80. Г. И. Будкер, Релятивистский стабилизированный пучок, Атомная энергия, № 5, 9 (1956).
  81. В. И. Векслер, Когерентный принцип ускорения заряженных частиц, Атомная энергия, № 5, 427 (1957).
  82. D. W. Kerst, Properties of an intersecting beam accelerating system, Symposium 1, CERN (1956). См. также D. W. Kerst and all, Attainment of very high energy by means of intersecting beams of particles, Phys. Rev. 102, 590 (1956).
  83. В. А. Петухов, Об экспериментальной возможности исследования структуры электрона, ЖЭТФ 32, 379 (1957).
  84. А. А. Коломенский, «Симметричный» кольцевой фазотрон с встречными пучками, ЖЭТФ 33, 298 (1957).
-