Глава 1

Введение

Кинематические события в физике элементарных частиц и ядер происходят в четырехмерном импульсном пространстве. Оно является достаточно организованным множеством, имеющим вполне определенные геометрические свойства. Положение каждой точки в этом пространстве может быть охарактеризовано четырехмерным радиус-вектором $\mathcal{P}$, проведенным в нее из начала системы координат; координаты конца этого вектора и есть координаты точки.

Каждая точка импульсного пространства соответствует состоянию движения некоторой реальной частицы с определенной массой m. При изменении ее состояния движения частица оказывается в другой точке импульсного пространства, однако при этом никак не изменяется "длина" соответствующего ей 4-вектора. Иными словами, состояния движения реальной частицы с определенной массой m заселяют в четырехмерном импульсном пространстве некоторую гиперповерхность, определяемую условием $\mathcal{P}^2 = const = m^2$.

Координаты конца 4-вектора $\mathcal{P}$ определяются величиной кинетической энергии частицы (T) и ее привычным трехмерным вектором импульса $\mathbf{p}$. Однако только в начале прошлого века стало понятным, что гораздо более важной характеристикой, чем кинетическая энергия, является сумма $E = T + m$, называемая полной энергией частицы, или – кратко – энергией. Именно E и $\mathbf{p}$ являются компонентами 4-вектора $\mathcal{P}$, а его "длина" определяется массой частицы:

$$\mathcal{P}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \tag{1.1}$$

Для реальных частиц, которые могут быть зарегистрированы детектором, полная энергия всегда положительна, а условие (1.1) всегда выполняется. Таким образом, состояния реальной частицы с массой m в импульсном пространстве заполняют гиперповерхность, выделенную двумя условиями: $\mathcal{P}^2 = m^2$ и $E \geq m$.

Какие бы события взаимодействия частиц ни происходили, они происходят так, что сохраняется не только привычный полный трехмерный импульс, но и полная энергия. Поэтому сохраняется и "длина" вектора полного 4-импульса:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{P}_j \ , \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{N} \mathcal{P}_j \right)^2 \ , \qquad (1.2)$$

где $\mathcal{P}_i$ есть 4-импульс i-й частицы начального состояния, n есть число частиц в начальном состоянии, N – число частиц после взаимодействия (оно не обязательно равно n), $\mathcal{P}_j$ ($\mathcal{P}_i$) – 4-импульс отдельной частицы соответствующего состояния.

Именно анализ следствий этого закона является основной задачей релятивистской кинематики элементарных процессов.

* * *

Согласно специальной теории относительности, законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. В применении к кинематике это означает, что для описания кинематических событий необходимо, во-первых, знать законы преобразования компонент 4-импульса при переходе от одной системы отсчета к другой, и во-вторых, необходимо стремиться к описанию этих событий в терминах таких переменных, которые не изменяются при переходе от одной системы отсчета к другой (такие переменные называются лоренц-инвариантными; при обсуждении вопросов кинематики их часто называют просто "инварианты").

Напомним элементарные свойства 4-векторов, под которыми понимается совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, испытывающих при преобразованиях четырехмерных координат изменения согласно *преобразованиям Лоренца* [9]. Принято записывать такую совокупность как A^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ или $\mathcal{A} = \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$ или $\mathcal{A} = \left(A^0, \mathbf{A}\right)$. Квадрат величины $\mathcal{A}$ (аналог квадрата модуля привычного трехмерного вектора) определяется как

$$\mathcal{A}^2 = \left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2 \ .$$

В зависимости от знака величины $\mathcal{A}^2$ множество 4-векторов расщепляется на 3 класса: при $\mathcal{A}^2 > 0$ они принадлежат классу времени-подобных 4-векторов, класс 4-векторов с $\mathcal{A}^2 < 0$ называется пространственно-подобным, а 4-векторы, для которых $\mathcal{A}^2 = 0$, составляют класс изотропных 4-векторов. Эта классификация релятивистски инвариантна. Свободно движущиеся частицы с ненулевой массой имеют времени-подобный вектор 4-импульса, а частицы с нулевой массой – изотропный. *Обсуждая кинематику физических процессов, экспериментатор имеет дело, как правило, с реальными частицами, поэтому соответствующие 4-импульсы физических реальных частиц времени-подобны или изотропны* (если масса частицы нулевая, как у фотона). Для виртуальных частиц их 4-импульс может принадлежать любому из классов.

В дальнейшем обсуждении вопросов кинематики элементарных процессов подразумевается, что речь идет о массивных частицах (например, при обсуждении 4-скорости); специальные случаи кинематики с участием фотонов оговариваются отдельно.

Запись вида A^μ соответствует т. н. *контравариантному* 4-вектору $\mathcal{A}$. Если определить новый 4-вектор с компонентами

$$A_0 = A^0 \ , \quad A_1 = -A^1 \ , \quad A_2 = -A^2 \ , \quad A_3 = -A^3 \tag{1.3}$$

и записать их как A_μ, то величину $\mathcal{A}^2$ можно переписать в форме

$$\mathcal{A}^2 = \sum_{\mu=0}^{4} A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3,$$

что принято записывать просто как $A^\mu A_\mu$, опуская знак суммирования, но подразумевая, что по совпадающим индексам, встречающимся и вверху, и внизу, производится суммирование.

Можно убедиться, что закон преобразования *ковариантного* вектора A_μ почти такой же, как в формулах (1.8, 1.11), отличаясь только знаком Γ в них, противоположным по отношению к знаку Γ в формулах преобразования для контравариантного вектора A^μ.

Скалярное произведение двух 4-векторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяется как

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} &\equiv \mathcal{A}\mathcal{B} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = \\ &= A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_0 B^0 - \mathbf{AB} \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Можно легко убедиться непосредственным вычислением, что величина $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$ действительно инвариантна относительно преобразований Лоренца, т. е. является скаляром в пространстве определенных здесь 4-векторов.

Важную роль в исчислении четырех-векторов играет *метрический тензор* $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, до сих пор не встречавшийся здесь, но с которым при чтении рекомендованной литературы читатель непременно встретится. Подозревая, что читатель с ним уже знаком и помня, что "лучше поздно, чем никогда", напомним и о нем.

Метрический тензор $g^{\mu\nu}$ представляется в виде матрицы

$$g = (g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{-1}. \tag{1.5}$$

С его помощью можно, например, переводить контравариантные 4-векторы в ковариантные и наоборот:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \ , \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \ . \tag{1.6}$$

(Здесь использовано данное выше соглашение о суммировании повторяющихся индексов.) Скалярное произведение двух 4-векторов с помощью этого тензора записывается очень просто:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}) = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu \ . \tag{1.7}$$

Почему тензор $g^{\mu\nu}$ называется "метрическим", любопытствующий читатель может узнать из литературы, например, из книги [5].

Более подробное рассмотрение свойств 4-векторов можно найти, в частности, в книгах [5, 9] и многих других.

* * *

Итак, компоненты 4-вектора $\mathcal{P} = (E, \mathbf{p})$ при переходе от одной системы отсчета к другой испытывают преобразования Лоренца. Настала пора их напомнить.

Пусть в какой-то системе отсчета S частица имеет импульс $\mathbf{p}$ и энергию E. Пусть другая система отсчета S' движется относительно S со скоростью $\boldsymbol{\beta}$ так, как показано на рисунке 1.1.

Тогда импульс $\mathbf{p}\,'$ и энергия $E\,'$ этой же частицы в системе отсчета S' будут связаны с $\mathbf{p}$ и E в системе S соотношениями

$$\begin{aligned} E\,' &= \gamma E - \Gamma p_\parallel \ , \\ p\,'_\parallel &= \gamma p_\parallel - \Gamma E \ , \\ p\,'_\perp &= p_\perp \ , \\ \mathbf{p}\,' &= (p\,'_\perp, 0, p\,'_\parallel) \ , \end{aligned} \tag{1.8}$$

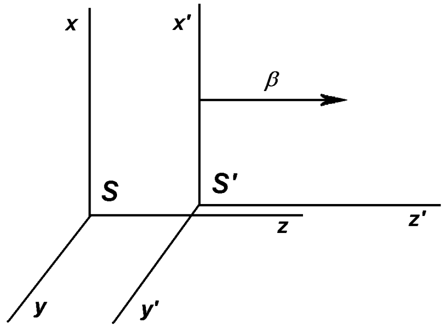

Рис. 1.1. Штрихованная система движется относительно нештрихованной со скоростью $\boldsymbol{\beta}$. Соответственно, система S относительно системы S' движется со скоростью $-\boldsymbol{\beta}$.

где $p_{\|}$ и $p'_{\|}$ – компоненты соответствующих импульсов, параллельные вектору скорости $\boldsymbol{\beta}$ (вдоль которой направлены, например, оси Z и Z' систем координат обеих систем отсчета), $p_{\perp}$ и $p'_{\perp}$ – компоненты этих импульсов, перпендикулярные вектору скорости $\boldsymbol{\beta}$ (вдоль этого перпендикуляра направлены, например, оси X и X' принятых нами систем координат), а величины γ и Γ есть

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \quad \Gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{1.9}$$

Здесь для произведения $\gamma\beta$ использовано удачное обозначение Γ из книги Г.И.Копылова [2], благодаря которому преобразование Лоренца (1.8) записывается в легко запоминающейся форме.

Если частица в системе отсчета S имеет импульс $\mathbf{p}$ и энергию E, то ее система покоя движется относительно S-системы с той же скоростью, что и эта частица, а именно:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{E} \ , \quad \gamma = \frac{E}{m} \ , \quad \Gamma \equiv \gamma \cdot \beta = \frac{p}{m} \ . \tag{1.10}$$

Преобразование (1.8) можно записать для любого 4-вектора $\mathcal{A} = (A^0, \mathbf{A}) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, A_x, A_y, A_z)$. То есть, при переходе из нештрихованной системы S (рис. 1.1) в штрихованную его компоненты преобразуются согласно

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma\left(A^0-\beta A^3\right)=\gamma A^0-\Gamma A^3\ ,\quad A'^1=A^1\ ,\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \\ A'^2 &= A^2\ ,\ \ A'^3=\gamma\left(A^3-\beta A^0\right)=\gamma A^3-\Gamma A^0\ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

В матричной записи это преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A'^{\,0} \\ A'^{\,1} \\ A'^{\,2} \\ A'^{\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\Gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}\ . \tag{1.12}$$

Примечательно, что если ввести 4-вектор[1] $\mathcal{G}=(\gamma,\mathbf{\Gamma})$, имеющий свойство $\mathcal{G}^2=\gamma^2-\mathbf{\Gamma}^2=1$, то формулы (1.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A'^0 &= \mathcal{A}\cdot\mathcal{G}\ ,\quad A'^1=A^1\ ,\ A'^2=A^2\ , \\ A'^3 &= \frac{1}{\gamma}\left(A^3-\Gamma(\mathcal{A}\cdot\mathcal{G})\right)=\frac{1}{\gamma}\left(A^3-\Gamma A'^0\right)\ . \end{aligned} \tag{1.13}$$

* * *

В современной физике частиц характеристики их взаимодействий описываются, как правило, в терминах лоренц-инвариантных кинематических переменных. О них речь пойдет позже. Широко употребляются также безразмерные переменные, одной из которых является *быстрота* (или относительная быстрота; ранее для нее использовался термин гиперскорость [2]). Напомним ее определение.

Как известно, если сделать два последовательных преобразования вида (1.11) с параметрами β_1 и β_2 при условии, что направления движения систем отсчета S_1 и S_2 параллельны (обозначения здесь очевидны), то полученный результат будет эквивалентен одному преобразованию с параметром β_3 вдоль того же направления:

$$\beta_3=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\cdot\beta_2}\ ,\quad \gamma_3=\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot(1+\beta_1\cdot\beta_2)=\gamma_1\cdot\gamma_2+\Gamma_1\cdot\Gamma_2\ , \tag{1.14}$$

[1] Фактически, 4-вектор $\mathcal{G}=(\gamma,\mathbf{\Gamma})$ есть не что иное, как 4-скорость. Это понятие будет рассмотрено позже.

что можно переписать в симметричном виде как

$$\gamma_3 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 + \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \ , \quad \Gamma_3 = \Gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \Gamma_2 \ . \qquad (1.15)$$

Определим *быстроту* η (или гиперскорость) согласно

$$\beta = \tanh \eta \ , \quad \gamma = \cosh \eta \ , \quad \Gamma \equiv \beta \cdot \gamma = \sinh \eta \ ; \qquad (1.16)$$

после этого нетрудно убедиться, что соотношения (1.15) в терминах быстрот означают, что

$$\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 \ . \qquad (1.17)$$

Иными словами, *при параллельных друг другу преобразованиях Лоренца быстроты складываются.*

Более подробное обсуждение этой переменной будет проведено позже; можно также обратиться за деталями к рекомендованным книгам по кинематике[2]. Здесь важно подчеркнуть именно это *свойство аддитивности быстрот* при параллельных преобразованиях Лоренца.

Матричная запись преобразования (1.12) при использовании быстроты η выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A'^{\,0} \\ A'^{\,1} \\ A'^{\,2} \\ A'^{\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & -\sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \ . \qquad (1.18)$$

Наконец, из соотношений (1.16), (1.18) становится почти очевидным, что рассмотренные здесь преобразования Лоренца фактически есть не что иное, как преобразования вращения в 4-мерном пространстве. Появление гиперболических функций вызвано тем, что это пространство не является евклидовым. Однако более подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки данного курса.

[2] Об определении быстроты для фотонов - см. [2].