Глава 17

Советы, указания, решения

Задача 1. Взяв определение мандельстамовских переменных, имеем:

$$
\begin{aligned}
s &= (\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2\mathcal{P}_a\mathcal{P}_b \ , \\
t &= (\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_c)^2 = m_a^2 + m_c^2 - 2\mathcal{P}_a\mathcal{P}_c \ , \\
u &= (\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_d)^2 = m_a^2 + m_d^2 - 2\mathcal{P}_a\mathcal{P}_d \ , \\
s + t + u &= \sum_{i=a}^{c} m_I^2 + 2\mathcal{P}_{\dashv}(\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_d) + 2m_a^2 \ ;
\end{aligned}
$$

а после учета закона сохранения полного 4-импульса $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b = \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_d$ или $\mathcal{P}_a = -\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_d$, вспомнив при этом, что $\mathcal{P}_a^2 = m_a^2$, приходим к формуле (3.3).

Задача 3. Дифференциальное сечение рассеяния на абсолютно черном шарике радиуса R, записанное в форме

$$
\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{\pi R^2}{-t} \cdot J_1^2\left(R\sqrt{-t}\right) \ ,
$$

- не зависит от начальной энергии и от того, в какой системе отсчета оно вычисляется;

- имеет максимум при $t = 0$, минимумы при значениях t таких, что $R\sqrt{-t} = Z_i$, где Z_i есть i–й нуль функции Бесселя $J_1(x)$, т. е. при $t_i = -(Z_i/R)^2$ и вторичные максимумы между ними, высота которых убывает с ростом $\mid t \mid$;

- Высота первого максимума (т. е. величина сечения $d\sigma/dt(0)$)) связана с полным сечением рассеяния и определяется радиусом R шарика;

- "Параметр наклона" дифракционного конуса (первого дифракционного максимума), определенный как $d\left(\ln\left(d\sigma/dt\right)\right)/dt(t = 0)$, также связан с полным сечением рассеяния, определяется радиусом R шарика и не зависит от начальной энергии (и системы отсчета).

Чтобы получить приближенную формулу для $d\sigma/dt$ при малых $R\sqrt{\mid t \mid}$ (а также понять происхождение термина "дифракционный конус"), необходимо вспомнить некоторые асимптотические свойства функций Бесселя.
1. Представление в виде ряда:

$$\begin{aligned} J_m(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!} \cdot \frac{1}{\Gamma(m+k+1)} \ . \end{aligned}$$

Вспоминая, что $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ легко увидеть, что

$$J_1(2x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)!}; \quad \frac{J_1(2x)}{x} - e^{-x^2/2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \cdot \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{2^k}\right] \ ;$$

$$\frac{J_1(2x)}{x} = e^{-x^2/2} - \frac{x^4}{24} + O\left(x^6\right) \ . \tag{17.1}$$

2. Положение нулей функций J_0 и J_1 можно найти с помощью формул:

$$J_0(x_n)=0 \Rightarrow \quad \frac{x_n}{\pi} \;=\; n-\frac{1}{4}+\frac{0.050661}{4n-1}-\frac{0.053041}{(4n-1)^3}+O\left([4n-1]^{-5}\right)\;,$$

$$J_1(Z_n)=0 \Rightarrow \quad \frac{Z_n}{\pi} \;=\; n+\frac{1}{4}-\frac{0.151982}{4n+1}+\frac{0.015399}{(4n+1)^3}-O\left([4n+1]^{-5}\right)\;.$$

Первые нули функции $J_1(x)$ приведены ниже:

$$Z_0=0\,;\quad Z_1\simeq 2.233\pi\,;\quad Z_2\simeq 3.238\pi\,;\quad Z_3\simeq 4.241\pi$$

Возвращаясь к формулам (3.8) (для чего надо лишь заменить $x \Rightarrow k\vartheta R = R\sqrt{-t}$) получаем связь между положением первого дифракционного минимума в дифференциальном сечении упругого рассеяния и полным сечением рассеяния:

$$x_1 = k\vartheta_1 R \simeq 2.233\pi\,;\quad (k\vartheta_1)^2 \simeq \frac{4.986\pi^2}{R^2} \simeq \frac{309}{\sigma_{tot}}\,;$$

$$\mid t\mid_1 \simeq (k\vartheta_1)^2 \simeq \frac{309}{\sigma_{tot}} \tag{17.2}$$

Предел малых $\mid t \mid$**.** Из формул (3.9) и (17.1) можно сразу получить знаменитую параметризацию дифференциальных сечений упругого рассеяния, о происхождении которой уже в 70-е годы мало кто помнил; повидимому, впервые этот предел и эту параметризацию в физике частиц рассмотрел С. Беленький (работа [75]) в 1956 году:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mid f\mid^2 = \frac{k^2R^4}{4}\cdot e^{-k^2R^2\vartheta^2/4} \tag{17.3}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^2}\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi\cdot\frac{R^4}{4}\cdot e^{-R^2\cdot|t|/4} = \frac{\sigma_{tot}^2}{16\pi}\cdot e^{-R^2\cdot|t|/4} \tag{17.4}$$

Последнее из выражений в цепочке равенств (17.4) было, повидимому впервые, введено в физику частиц в работе [76] В.Г. Гришина и И.С. Саитова в 1957 г. и использовано для оценки радиуса взаимодействия частиц из экспериментальных данных. Именно с тех пор стала общепринятой эта параметризация дифференциальных сечений упругого рассеяния при высоких энергиях в дифракционной зоне и появился термин "параметр наклона дифракционного конуса"

b. В модели рассеяния на абсолютно черном шарике с резким краем это не что иное, как

$$b = \frac{R^2}{4} = \frac{\sigma_{tot}}{8\pi} \tag{17.5}$$

К задаче 5. Рассмотрите упругое рассеяние "назад" в центре масс, считая ϑ^* величиной отклонения от 180°.

Задача 6. a) Выведем формулу

$$T^{thresh}_{projectile} = M_X + \frac{M_X}{M_{targ}} \cdot \left(m_{proj.} + \frac{M_X}{2} \right) \ , \ M_X = M_{proj} + m_2 - M_{targ} \ .$$

По определению порога реакции имеем:

$$s_{thresh} = \left(\mathcal{P}_{proj} + \mathcal{P}_{targ}\right)^2 = \left(M_{proj} + M_{targ} + M_X\right)^2 \ , \tag{17.6}$$

где M_X есть "рожденная масса", т. е. избыток массы конечной системы по сравнению с суммой масс начальных частиц. Именно в нее и превратилась (на пороге) кинетическая энергия начального состояния. Вычислим величину s_{thresh} в лабораторной системе отсчета (мишень покоится), т. е. раскроем выражение для квадрата полного 4-импульса начального состояния:

$$s_{thresh} = M^2_{proj} + M^2_{targ} + 2\left(T_{thresh} + M_{proj}\right) M_{targ} \ ,$$

где уже учтено, что $\mathcal{P}_{proj} = \left(\left(T + M_{proj}\right), \mathbf{p}_{proj}\right)$ и $\mathcal{P}_{targ} = (M_{targ}, \mathbf{p}_{targ} = 0)$. Раскрывая скобки самой правой части формулы (17.6) и приравняв полученное выражение к выражению для s_{thresh} в лабораторной системе, после несложных алгебраических преобразований получим искомую формулу.

b) Вычислим величину $t_{p\to meson}$ на пороге реакции типа $pp \to p + Y + \mathrm{meson}$ (формулы (3.16)-(3.18)).

По определению, $t_{p\to meson} = \left(\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_{meson}\right)^2$, где частица a - протон (массу протона обозначим как M_p), частица Y - барион (может быть со странностью, но для выкладок это несущественно) с массой M_Y, массу мезонной системы (это не обязательно один мезон) обозначим как m.

Проведем вычисления в системе центра масс. Тогда 4-импульс мезонной системы (рассматриваем кинематику на пороге!) $\mathcal{P}_{meson} = (m, \, 0)$, и

$$\begin{aligned} t_{p\to meson} &= \left(\mathcal{P}_a - \mathcal{P}_{meson}\right)^2 = \left(E^{*\,2}_a - m, \, \mathbf{p}^*_a\right)^2 = \\ &= M^2_p + m^2 - 2E^*_a \cdot m \ , \end{aligned} \tag{17.7}$$

где E_a^* - энергия пучкового протона в системе центра масс, $\mathbf{p}_a$ - его импульс (в той же системе, естественно). Поскольку рассматриваем реакцию с двумя протонами в начальном состоянии, то полная энергия в системе центра масс есть, очевидно, $2E_a^*$. Она же, с другой стороны, согласно определению мандельстамовской переменной s, есть $\sqrt{s}$, и значит, $E_a^* = \sqrt{s}/2$. Поскольку задача рассматривается на пороге, то

$$E_a^* = \frac{1}{2}\sqrt{s} = \frac{1}{2}\left(M_p + M_Y + m\right) \ .$$

Подставив полученное выражение в формулу (17.7), после небольшой алгебраической выкладки приходим к искомой формуле:

$$t_{p\to meson} = M_p^2 \cdot \left[1 - \frac{m}{M_p}\left(1 + \frac{M_Y}{M_p}\right)\right] \ .$$

Действуя аналогичным образом, нетрудно найти формулы для квадратов 4-импульсов, переданных от пар "пучковый протон – рассеянный протон" или "пучковый протон – барион Y ".

Задача 7. Указания к первому пункту задачи: 1) используйте определение порога реакции и вычислите энергию фотона E_γ^{thresh} в лабораторной системе на пороге рассматриваемой реакции; 2) найдите скорость β_{cm} системы центра масс при E_γ^{thresh}; 3) зная энергию и импульс рожденного ϕ-мезона в системе центра масс, найдите ответ на поставленный вопрос, выполнив лоренцевское преобразование из с.ц.м. в л.с. для импульса ϕ-мезона. После ответа на вопросы первого пункта задачи, указания для поиска ответа на вопросы ее второго пункта не требуются.

Задача 8.

Действуя так же, как и при решении задачи 7, но учитывая, что $M \neq m$, нетрудно увидеть, что пороговая энергия фотона в л.с. есть

$$E_\gamma^{thr} = M \cdot \left(1 + \frac{M}{2m}\right) \ .$$

Далее можно воспользоваться соотношениями

$$\beta_{cm} = \frac{p_{\,tot}}{E_{tot}} \ , \ \ \gamma_{cm} = \frac{E_{tot}}{M_{tot}} \ ,$$

где $E_{tot} = E_\gamma + m$ есть полная лабораторная энергия, при которой происходит реакция, M_{tot} есть полная масса системы (снаряд+мишень), то есть, просто $\sqrt{s}$, а $p_{\,tot} = p_\gamma + p_{targ} = p_\gamma$ есть полный импульс в этой реакции. Зная энергию фотона в л.с. на пороге и помня об определении порога реакции, нетрудно увидеть, что искомый импульс бозона в л.с. равен

$$|p_{lab}^{M,\,thr}| = M \cdot \frac{1 + \frac{M}{2m}}{1 + \frac{m}{M}} \ .$$

Проверьте, что в частном случае $M = m$ этот ответ совпадает с ответом задачи 7.

Задача 9. Указание: используйте результаты, полученные при решении задачи 8.

Задача 10. Указания:

1. воспользуйтесь результатами решения задач 7- 9 и проверьте, есть ли на верхней панели рисунка 16.1 события, отнесенные аспирантом к рассматриваемой реакции, которые находятся в запрещенной ее кинематикой области;

2. сравните характер распределения событий по энергии фотонов в области $E_\gamma < 2$ ГэВ с поведением, ожидаемым из общего характера энергетической зависимости сечений околопорогового рождения для реакций типа $2 \to 2$.

Задача 11. Выпишем соотношения (3.22) для нерелятивистского случая $\beta \ll 1$, $\gamma \approx 1$:

$$\begin{aligned} u_{12}^0 &= (u_1 \cdot u_2) \\ \mathbf{u}_{12} &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \cdot \frac{u_1^0 + u_{12}^0}{1 + u_2^0} \ . \end{aligned}$$

В этом случае $u_1^0 \approx 1$ и $u_2^0 \approx 1$, т. е. знаменатель во второй строчке формулы (3.22) равен 2. Рассмотрим числитель, то есть, вычислим скалярное произведение $u_{12}^0 = (u_1, u_2) = u_1^0 \cdot u_2^0 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) = 1 - (\boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2) \approx 1$, и в итоге получаем нерелятивистскую формулу для относительной трехмерной скорости:

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \ .$$

Задача 13. Выразим лабораторный импульс снаряда через инварианты (аналогично формуле (3.29)). Вначале выпишем выражение для мандельстамовской s в лабораторной системе:

$$s = (\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b \ ;$$

то есть,

$$E_a = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \ .$$

Абсолютная величина импульса частицы связана с величиной ее энергии: $p^2 = E^2 - m^2$; подставив в это соотношение выраженную через s энергию снаряда и проделав простые алгебраические выкладки, получаем:

$$p_a = \frac{\lambda^{1/2}\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}{2m_b} \ ,$$

что и требовалось найти.

Задача 14. Выведем формулы (3.32):

$$\beta_{cm} = \frac{p_a}{E_a + m_b} \approx 1 - \frac{2m_b^2}{s} \ , \gamma_{cm} = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b\sqrt{s}} \approx \frac{\sqrt{s}}{2m_b} \ .$$

Способ 1. Лоренцевский гамма-фактор, по определению, есть отношение полной энергии частицы (или системы частиц) к ее эффективной массе (для свободной частицы это просто масса частицы). Гамма-фактор для системы центра масс (в лаб. системе) есть, т.о.

$$\gamma_{cm} = \frac{E_a + m_b}{\sqrt{s}} \ ,$$

так как полная энергия начального состояния есть $E_a + m_b$, а эффективная масса начального состояния есть не что иное, как $\sqrt{s}$. Выражение для E_a через величину s было получено в предыдущей задаче. Используя ту формулу, получаем:

$$\gamma_{cm} = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b\sqrt{s}} = \frac{s\left(1 - \frac{m_a^2 - m_b^2}{s}\right)}{2m_b\sqrt{s}} \ ,$$

что в пределе $s \gg m_a^2$, $s \gg m_b^2$, когда в числителе можно пренебречь вторым членов в скобках, дает искомое выражение

$$\gamma_{cm} = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b\sqrt{s}} \approx \frac{\sqrt{s}}{2m_b} \ .$$

Замечая далее, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ , \ \ \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \ ,$$

а также используя малость величины $m_b/\sqrt{s} \ll 1$, легко получить искомую формулу для β_{cm}:

$$\beta_{cm} = \frac{p_a}{E_a + m_b} \approx 1 - \frac{2m_b^2}{s} \ .$$

Способ 2. По определению лоренцевского фактора β, он есть не что иное, как отношение полного импульса частицы (или системы частиц) к ее полной энергии. Полная энергия начального состояния есть $E_a + m_b$ и соответствующее выражение уже выписано выше. Полный импульс начального состояния в лабораторной системе равен p_a. Выражение для него через переменную s получено в предыдущей задаче. Таким образом,

$$\beta_{cm} = \frac{\lambda^{1/2}\left(s,\, m_a^2,\, m_b^2\right)}{s - m_a^2 + m_b^2} \ , \tag{17.8}$$

и остается только учесть, что $s \gg m_a^2$, $s \gg m_b^2$. Для этого обратимся к определению функции λ, запишем ее в виде:

$$\lambda^{1/2}\left(s,\, m_a^2,\, m_b^2\right) = s\left(1 - 2\frac{m_a^2 + m_b^2}{s} + \frac{\left(m_a^2 - m_b^2\right)^2}{s^2}\right)^{1/2} \ ,$$

и разложим в ряд квадратный корень, удерживая только члены первого порядка по величине $1/s$:

$$\lambda^{1/2}\left(s,\, m_a^2,\, m_b^2\right) \approx s\left(1 - \frac{m_a^2 + m_b^2}{s}\right) \ .$$

Аналогично поступим со знаменателем в (17.8):

$$\frac{1}{s - m_a^2 + m_b^2} = \frac{1}{s\left(1 - \frac{m_a^2 - m_b^2}{s}\right)} \approx \frac{1}{s}\left(1 + \frac{m_a^2 - m_b^2}{s}\right) \ .$$

Собрав оба выражения вместе, получим искомое выражение:

$$\beta_{cm} = \frac{p_a}{E_a + m_b} \approx 1 - \frac{2m_b^2}{s} \ .$$

Далее нетрудно найти выражение для γ_{cm}, пользуясь связью между гамма-фактором и скоростью β.

Задача 15. Из задачи 13 уже известно, что

$$p_a = \frac{\lambda^{1/2}\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}{2m_b}\ ,\ E_a = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}\ ,\ E_a + m_b = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2m_b}\ .$$

Подставляя эти выражения в формулу (см. предыдущую задачу) для скорости движения системы центра масс относительно лабораторной системы имеем, с учетом $m_a = m_b = m$:

$$\beta_{cm} = \frac{p_a}{E_a + m_b} = \frac{\lambda^{1/2}\left(s, m^2, m^2\right)}{s}\ .$$

Для скорости частицы a относительно системы центра масс, то есть для величины

$$\beta_a^* = \frac{p^*}{E^*}\ ,$$

подставим выражения для импульса и энергии, получаемые через инварианты (см. формулы (3.27) и (3.29)), с учетом $m_a = m_b = m$ имеем:

$$\beta_a^* = \frac{p^*}{E^*} = \frac{\lambda^{1/2}\left(s, m^2, m^2\right)}{s}\ ,$$

то есть:

$$\beta_{cm} = \beta_a^* \text{ или } \ g_a^* = \frac{\beta_{cm}}{\beta_a^*} = 1\ .$$

Иными словами, **для рассеяния двух частиц одинаковой массы, скорость движения центра масс относительно лабораторной системы (где одна из них покоится) равна скорости одной из этих частиц в системе центра масс**.

Задача 16. В системе центра масс лабораторная система движется со скоростью $-\beta_{cm}$ (знак "-" означает, что направление скорости лабораторной системы в с.ц.м. противоположно направлению скорости с.ц.м. в лабораторной системе). Тогда импульс рассматриваемой частицы в лабораторной системе есть, согласно правилам лоренцева преобразования,

$$p_z = \gamma_{cm}\left(\beta_{cm}E^* + p_z^*\right)\ ,\ \ \mathbf{p}_\perp = 0\ .$$

Но тогда $\mid p_z \mid$ есть модуль полного импульса рассматриваемой частицы, а значит $\mid p_z \mid = \mid \boldsymbol{\beta}^* \mid \cdot E^*$. Отсюда имеем

$$p_z = \gamma_{cm}E^*\left(\beta_{cm} + \beta^*\right)\ ,\ \ \mathbf{p}_\perp = 0\ ,$$

если направление движения рассматриваемой частицы совпадает с направлением движения системы центра масс в лабораторной системе отсчета, и

$$p_z = \gamma_{cm} E^* \left(\beta_{cm} - \beta^*\right) \ , \ \ \mathbf{p}_\perp = 0 \ ,$$

если частица движется в противоположном направлении.

Задача 18. Очевидно, что лабораторный угол рассеяния θ можно найти из соотношения

$$\tan\theta = \frac{|\,\mathbf{p}_\perp|}{p_z} \equiv \frac{p_\perp}{p_z} \ .$$

С другой стороны, очевидно, что $p_\perp = p_\perp^* = p^* \sin\theta^*$ и $p_z^* = p^* \cos\theta^*$. Используя решение предыдущей задачи, легко увидеть, что

$$p_z = \gamma_{cm} E^* \left(\beta_{cm} + \beta^* \cos\theta^*\right) \ , \ \ p^* = \beta^* E^* \ .$$

Собирая все вместе в выражении для тангенса угла рассеяния, получаем требуемое выражение:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta^*}{\gamma_{cm}\left(g^* + \cos\theta^*\right)} \ , \ \ g^* = \frac{\beta_{cm}}{\beta^*} \ .$$

К задаче 19: решить уравнение (3.40)

$$E^* + \beta_{cm}\gamma_{cm} p \cos\theta = \gamma_{cm} \left(p^2 + m^2\right)^{1/2} \ .$$

Поступая стандартным способом, то есть, возводя обе части этого уравнения в квадрат и заменив E^* на $m\gamma^*$, получим:

$$p^2 \left(1 - \beta_{cm}^2 \cos^2\theta\right) - 2p\, m\beta_{cm} \frac{\gamma^*}{\gamma_{cm}} \cos\theta + m^2 \left(1 - \frac{\gamma^{*\,2}}{\gamma_{cm}^2}\right) = 0 \ .$$

Рассмотрим детерминант $4\tilde{D}$ этого уравнения:

$$4\tilde{D} = 4m^2 \beta_{cm}^2 \frac{\gamma^{*\,2}}{\gamma_{cm}^2} \cos^2\theta - 4\left(1 - \beta_{cm}^2 \cos^2\theta\right) \cdot m^2 \left(1 - \frac{\gamma^{*\,2}}{\gamma_{cm}^2}\right) \ ,$$

и преобразуем его, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Это даст:

$$\tilde{D} = m^2 \left[\beta_{cm}^2 \cos^2\theta + \frac{\gamma^{*\,2}}{\gamma_{cm}^2} - 1\right] \ .$$

Теперь вынесем фактор $1/\gamma_{cm}^2$ из квадратных скобок, а также используем соотношения

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\ ,\ \ \gamma^{*\,2} - 1 = \gamma^{*\,2}\beta^{*\,2}\ .$$

В результате чего, после небольших преобразований, получаем выражение

$$4\tilde{D} = 4\frac{m^2}{\gamma_{cm}^2}\left[\gamma^{*\,2}\beta^{*\,2} - \gamma_{cm}^2\beta_{cm}^2\sin^2\theta\right]\ . \tag{17.9}$$

Теперь нетрудно записать решение исходного уравнения в форме (сравните с (3.41))

$$p^{\pm} = \frac{m}{\gamma_{cm}}\cdot\frac{\beta_{cm}\gamma^*\cos\theta \pm \left[\gamma^{*\,2}\beta^{*\,2} - \gamma_{cm}^2\beta_{cm}^2\sin^2\theta\right]^{1/2}}{1-\beta_{cm}^2\cos^2\theta}\ .$$

К задаче 20. Рассмотрим бинарную неупругую реакцию типа $\mu+m\to\mu+M$, где μ – масса снаряда, m – масса мишени, M – масса частицы, в которую после рассеяния превратилась частица-мишень. **Будем помечать величины, относящиеся к частицам с массами μ, m и M, этими же буквами как нижними индексами.** То есть, 4-импульс частицы пучка с массой μ обозначим как $\mathcal{P}_\mu$, 4-импульс рассеянной частицы с этой же массой обозначим как $\mathcal{P}'_\mu$ и т. д.

По определению переменной t имеем:

$$t = \left(\mathcal{P}_\mu - \mathcal{P}'_\mu\right)^2 = \left(\mathcal{P}_m - \mathcal{P}_M\right)^2 = 2\mu^2 - 2\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}'_\mu\ ,$$

что в системе центра масс можно записать как

$$t = 2\mu^2 - 2\left(E_\mu^* E'^*_\mu - p_\mu^* p'^*_\mu\cos\theta^*\right)\ .$$

Здесь θ^* - угол рассеяния в системе центра масс. Это позволяет выразить $\cos\theta^*$ через инварианты:

$$\cos\theta^* = \frac{t - 2\mu^2 + 2E_\mu^* E'^*_\mu}{2p_\mu^* p'^*_\mu}\ ,$$

а условие $|\ \cos\theta^*\ |\le 1$ накладывает ограничения на допустимые значения мандельстамовских переменных (в дополнение к другим ограничениям). Предельные значения $\cos\theta^*$ есть $+1$ и -1; им соответствуют предельные допустимые значения величины t. Очевидно, что минимальное значение $\mid t_{min} \mid$ отвечает $\cos\theta^* = +1$ (достаточно убедиться в этом для упругого рассеяния, когда $\mid t_{min} \mid = 0$).

Положив $\cos\theta^* = +1$, получаем уравнение для t_{min}:

$$t_{min} = 2\mu^2 - 2E^*_\mu {E'}^*_\mu + 2p^*_\mu {p'}^*_\mu \ . \qquad (17.10)$$

Видно, что квадрат переданного 4-импульса t связан, для неупругих реакций, не только с передачей поперечного импульса (как это было для упругого рассеяния), но и с передачей продольного импульса и переходом части кинетической энергии в дополнительную массу вторичной частицы. Минимальное значение t_{min} определяется теперь минимально необходимой для реализации рассматриваемой реакции передачей продольного импульса и соответствующей передачей энергии.

Теперь вместо энергии и импульсов в системе центра масс можно подставить их выражения через инварианты (см. Часть II):

$$\begin{aligned} t_{min} \ &= \ 2\mu^2 - \frac{1}{2s}\Big[\left(s+\mu^2-m^2\right)\left(s+\mu^2-M^2\right) - \\ &- \ \lambda^{1/2}\left(s,\mu^2,m^2\right)\lambda^{1/2}\left(s,\mu^2,M^2\right)\Big] \ . \qquad (17.11) \end{aligned}$$

Сделаны почти все нужные заготовки для получения ответа на поставленный в задаче вопрос. Осталось только рассмотреть предел $s \gg m_i^2$. Оказывается, что для этого удобно ввести следующие параметры:

$$\varepsilon_{\mu\, m} = \frac{\mu}{2E_\mu} = \frac{m\mu}{s-\mu^2-m^2} \ , \ \ \varepsilon_{\mu\, M} = \frac{\mu}{2{E'}_\mu} = \frac{M\mu}{s-\mu^2-M^2} \ .$$

Действительно: рассмотрим $\lambda^{1/2}\left(s,\mu^2,m^2\right)$. Пользуясь определением функции λ, легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \lambda^{1/2}\left(s,\mu^2,m^2\right) \ &= \ \left[\left(s-\mu^2-m^2\right)^2 - 4m^2\mu^2\right]^{1/2} = \\ &= \ \left(s-\mu^2-m^2\right)\left(1-4\varepsilon^2_{\mu\, m}\right)^{1/2} = \\ &= \ \left(s-\mu^2-m^2\right)\left(1-2\varepsilon^2_{\mu\, m} - 2\varepsilon^4_{\mu\, m} + O\left(\varepsilon^6_{\mu\, m}\right)\right) \ ; \end{aligned}$$

аналогичное разложение получается для $\lambda^{1/2}\left(s,\mu^2,M^2\right)$. Остается подставить полученные разложения в выражение для t_{min} и педантично провести простые, но громоздкие, выкладки.

Однако, можно стартовать прямо от формулы (17.10). При этом пригодится разложение

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots\,. \tag{17.12}$$

Вначале заметим, что

$$E'^{*}_{\mu} = \frac{s+\mu^2-M^2}{2\sqrt{s}} = E^{*}_{\mu} - \frac{M^2-m^2}{2\sqrt{s}}\ , \tag{17.13}$$

и поэтому

$$E^{*}_{\mu}E'^{*}_{\mu} = E^{*\,2}_{\mu} - E^{*}_{\mu}\frac{M^2-m^2}{2\sqrt{s}}\ . \tag{17.14}$$

Теперь займемся произведением $p^{*}_{\mu}p'^{*}_{\mu}$. Поскольку $p'^{*\,2}_{\mu} = E'^{*\,2}_{\mu} - \mu^2$, то подставляя сюда E'^{*}_{μ} из (17.13) имеем, после небольшой выкладки:

$$p'^{*}_{\mu} = p^{*}_{\mu}\left[1 - \frac{E^{*}_{\mu}}{p^{*\,2}_{\mu}}\cdot\frac{M^2-m^2}{\sqrt{s}} + \frac{1}{p^{*\,2}_{\mu}}\frac{\left(M^2-m^2\right)^2}{4s}\right]^{1/2}\ .$$

Таким образом, произведение $p^{*}_{\mu}p'^{*}_{\mu}$ есть

$$p^{*}_{\mu}p'^{*}_{\mu} = p^{*\,2}_{\mu}\left[1 - \frac{E^{*}_{\mu}}{p^{*\,2}_{\mu}}\cdot\frac{M^2-m^2}{\sqrt{s}} + \frac{1}{p^{*\,2}_{\mu}}\frac{\left(M^2-m^2\right)^2}{4s}\right]^{1/2}\ .$$

Настало время использовать формулу (17.12):

$$\begin{aligned} p^{*}_{\mu}p'^{*}_{\mu} &= p^{*\,2}_{\mu}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{E^{*}_{\mu}}{p^{*\,2}_{\mu}}\cdot\frac{M^2-m^2}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2p^{*\,2}_{\mu}}\frac{\left(M^2-m^2\right)^2}{4s} - \right. \\ &- \frac{1}{8}\frac{p^{*\,4}_{\mu}+\mu^2}{p^{*\,2}_{\mu}}\cdot\frac{\left(M^2-m^2\right)^2}{s} + \\ &+ \left.\frac{1}{4}\frac{E^{*}_{\mu}}{p^{*\,4}_{\mu}}\cdot\frac{\left(M^2-m^2\right)^3}{4s\sqrt{s}} - \ldots\right]\ . \end{aligned} \tag{17.15}$$

Разность $E^{*}_{\mu}E'^{*}_{\mu} - p^{*}_{\mu}p'^{*}_{\mu}$ получаем, используя формулы (17.14) и (17.15), а также формулу $p^{*}_{\mu} = \lambda^{1/2}\left(s,\mu^2,m^2\right)/2\sqrt{s}$:

$$\begin{aligned} E^{*}_{\mu}E'^{*}_{\mu} - p^{*}_{\mu}p'^{*}_{\mu} &= \mu^2 + \frac{1}{8}\frac{\mu^2\left(M^2-m^2\right)^2}{sp^{*\,2}_{m}u} + \ldots = \\ &= \mu^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2\left(M^2-m^2\right)^2}{\lambda\left(s,\mu^2,m^2\right)} + \ldots\ . \end{aligned} \tag{17.16}$$

Подставляя $E^*_\mu {E'}^*_\mu - p^*_\mu {p'}^*_\mu$ из (17.16) в формулу (17.10), в пределе $s \gg m_i^2$, когда массами в функции λ уже можно пренебречь, приходим к искомому результату:

$$t_{min} \approx -\frac{\mu^2 \left(M^2 - m^2\right)^2}{s^2} + \ldots \,. \tag{17.17}$$

К задаче 21.

(б) Пусть базисная система ортов в центре масс определена согласно формулам (16.1):

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i}{\left|\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i\right|} \ , \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}{\left|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i\right|} \ , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f}{\left|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f\right|} \ ,$$

где $\mathbf{k}_i$ и $\mathbf{k}_f$ есть единичные векторы, направленные вдоль импульсов начальной и рассеянной частиц, соответственно (разумеется, в системе центра масс).

Необходимо убедиться в том, что вектора $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} \ , \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l} \ , \quad \mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m} \ .$$

Проведем выкладку для проверки того, что $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}{\left|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i\right|} \times \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f}{\left|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f\right|} = \frac{\mathbf{k}_f \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f] - \mathbf{k}_i \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f]}{\left|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i\right| \cdot \left|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f\right|} \ .$$

Рассмотрим числитель; воспользуемся правилом $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\mathbf{b})$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{k}_f \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f] & = & \mathbf{k}_i\,(\mathbf{k}_f\,\mathbf{k}_f) - \mathbf{k}_f\,(\mathbf{k}_f\,\mathbf{k}_i) = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \cos\theta \ , \\
\mathbf{k}_i \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f] & = & \mathbf{k}_i\,(\mathbf{k}_i\,\mathbf{k}_f) - \mathbf{k}_f\,(\mathbf{k}_i\,\mathbf{k}_i) = \mathbf{k}_i \cos\theta - \mathbf{k}_f \ , \\
\mathbf{k}_f \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f] & - & \mathbf{k}_i \times [\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f] = (\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f)\,(1 - \cos\theta) \ ,
\end{array}$$

где θ - угол между единичными векторами $\mathbf{k}_f$ и $\mathbf{k}_i$.

Теперь рассмотрим знаменатель:

$$\left|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i\right| \cdot \left|\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_f\right| = \sin\theta \sqrt{2\,(1-\cos\theta)} = 2\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta) \ ,$$

то есть,

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f}{2\cos\theta/2} \ .$$

Однако, $\left|\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i\right| = \sqrt{2\,(1+\cos\theta)} = 2\cos\theta/2$, то есть, окончательно,

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f}{\left|\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i\right|} = \mathbf{l}\ .$$

Аналогичным образом, без особых затруднений, делаются выкладки для проверки оставшихся соотношений.

К задаче 23. Вначале покажите, что справедливо выражение (4.11)

$$\mathcal{P}_n^{rel} = \left(\frac{M_d}{m_p} E_p - m_p\,,\ -\mathbf{q}\frac{M_d}{m_p}\right)\ .$$

Из него следует, что если $\mathcal{P}_n^{rel} = m_n^2$, то относительный импульс нейтрона равен нулю. Это соответствует ситуации, когда дейтрон разваливается на систему нейтрон+протон и каждый из фрагментов несет (в лабораторной системе отсчета) половину импульса дейтрона (если дейтрон движется относительно лабораторной системы).

Затем решите относительно q уравнение $\mathcal{P}_n^2 = 0$. Не забудьте, что в рассматриваемой кинематической модели дейтрон всегда остается на массовой поверхности, то есть $\mathcal{P}_d^2 = \left(\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_n\right)^2 = M_d^2$!

К задаче 25. Выпишите уравнения закона сохранения энергии и трехмерного импульса. Учтите условие, что в лабораторной системе отсчета Λ-гиперон покоится ("условие безотдачности"): это поможет решить выписанные уравнения относительно энергии K-мезона:

$$E_K = \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{2(m_\Lambda - m_n)} + \frac{m_\Lambda - m_n}{2}\,.$$

Подставляя численные значения масс частиц, нетрудно получить значение магического импульса (около 530 МэВ/с).

К задаче 26. Действуя так же, как при решении предыдущей задачи, получим

$$E_\gamma = \frac{m\cdot(2M-m)}{2(M-m)}\,.$$

Из условия неотрицательности энергии немедленно видим, что "условие безотдачности" или "условие Подгорецкого" может реализоваться только при $m < M$, то есть, масса рожденного фотоном мезона не должна превосходить массу поглотившей фотон мишени.

К задаче 27. Совет: выпишите определение эффективной массы группы частиц. Не забудьте, что имеете дело с фотонами.

К задаче 28. Совет: посмотрите еще раз на решение предыдущей задачи.

К задаче 31. Проконсультируйтесь у Г.И.Копылова [2] (гл. II, параграф 4, после формулы (29)).

К задачам 33-34. Заметим, что:

$$(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)^2 = \mathcal{P}_0^2 \ ,$$

(см. 6.11), а также определим:

$$q^2 = \frac{1}{2}\left(M_0^2 - m_1^2 - m_2^2\right) \ .$$

Из формулы (6.11) легко увидеть, выполнив возведение в квадрат и все остальное, что (6.12) на самом деле справедливо. Теперь остается только выразить E_2 и p_2 через E_1. Далее, в случае затруднений, проконсультируйтесь у Г.И.Копылова [2] (гл. II, параграф 4).

К задаче 41. При поиске ответа на первый вопрос этой задачи, сначала найдите ответ на основной вопрос о "щели" между островком и областью, ограниченной "гребнем", а уж затем попробуйте найти объяснение "гребню".

Если вам трудно преодолеть возникшие при поисках ответа затруднения, поищите ответы в оригинальной статье.

К задачам 48-49. Проконсультируйтесь у Г. Челлена [8]

К задаче 56. Эта задача (см. параграф 15.3, взятая из лекций [97], – частный случай т. н. "задачи Штайнера", или "задачи о кратчайшей сети". В деталях с ней можно познакомиться в статье Е.Абакумова и др. "Кратчайшие сети" (журнал "Квант"). Ряд полезных на практике теорем, связанных с задачей о кратчайшей сети, можно найти в упомянутой статье.

К задаче 57. Правильный ответ на этот вопрос показан на рис. 16.4. Он немедленно следует из теорем, связанных с задачей Штайнера.

КХД расчеты на решетке (без обращения к этим теоремам) его подтверждают.

К задаче 59. Обратите внимание на численный коэффициент 13.6 МэВ в числителе. Чтобы увидеть ответ на поставленный в задаче вопрос, обратитесь, например, к справочнику о свойствах частиц [29].