.

Осенний и весенний семестры 2007-2008 учебного года

ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА

спецкурса кафедры физики элементарных частиц

физического факультета МГУ "Диаграммы Фейнмана"

к.ф.-м.н. Никитин Николай Викторович (НИИЯФ МГУ)

4 курс, 7 и 8 семестры

Цели и задачи курса

Курс лекций рассчитан на студентов, которые желают стать квалифицированными экспериментаторами в области физики высоких энергий. Хороший экспериментатор ОБЯЗАН иметь представление о методах, применяемых теоретиками, чтобы грамотно переводить теоретические предсказания на язык эксперимента. В физике элементарных частиц основой большинства теоретических вычислений служат так называемй **диаграммный метод** – в основе которого лежат наглядные и интуитивно понятные рисунки (диаграммы Фейнмана), топологическая структура которых отражают физические свойства рассматриваемых процессов взаимодействия элементарных частиц в рамках релятивистски–инвариантной теории возмущений.

Данный курс рассчитан на два семестра. Основной задачей первого семестра является ознакомление студентов с диаграммным методом на примере простейших процессов квантовой электродинамики (КЭД). Цель первого семестра будет достигнута, если по его окончании среднестатистический студент сможет САМОСТОЯТЕЛЬНО вычислить сечения процессов $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$, $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, $e^-\gamma \to e^-\gamma$, $e^+e^- \to \gamma\gamma$, $e^-e^- \to e^-e^-$, $e^+e^- \to e^+e^-$ и аналогичных им в древесном приближении. Во втором семестре студенты должны познакомиться с основными вычислительными приемами Квантовой хромодинамики (КХД) и научиться вычислять простейшие петлевые диаграммы КЭД при помощи размерной регуляризации.

Исходя из логики изложения, лекционные занятия чередуются с семинарскими. К каждой лекции прилагается набор задач, которые позволяют глубже разобраться в материале лекций и подготовиться к зачету/экзамену. Для допуска к зачету/экзамену необходимо правильно решить больше половины задач.

Еще раз необходимо подчеркнуть, что инвариантная теория возмущений – основа физики элементарных частиц, а диаграммы Фейнмана – ее естественный язык. Без знания этого языка невозможно не только понимать все последующие курсы, которые будут читаться на кафедре, но и плодотворно работать в избранной области после окончания Университета.

В электронном виде прозрачки, программу и задачи курса можно найти на сайте кафедры Общей ядерной физики физфака МГУ по адресу *http://nuclphys.sinp.msu.ru/fdiag/* .

Обо всех замеченных неточностях и опечатках просьба сообщать автору по телефону *(495) 939–55–45* или по электронной почте *679nik@mail.ru*. В заголовке письма необходимо поставить метку "QFT–4", чтобы данное письмо можно было отличить от спама.

Примерная программа курса

I. Общие принципы построения квантовой теории поля (КТП) (одна лекция).

Лекция N1:

- Стандартные обозначения, верхние и нижние индексы.
- Система единиц $\hbar = c = 1$.
- Система единиц Хевисайда ($\alpha_{em} = e^2/4\pi$).
- Закон Кулона и уравнения Максвелла в новой системе единиц.
- Ограничения, накладываемые на измеряемые величины соотношением неопределенности при конечной скорости света.
- Основное отличие КТП от КМ: возможность рождения и уничтожения частиц.
- Чем характеризуются элементарные частицы в эксперименте?
- Типичная постановка задачи в КТП: сечения рассеяния и ширины распадов. Примеры некоторых интуитивно ясных диаграмм Фейнмана.

II. Основы лагранжева формализма в КТП (одна лекция).

Лекция N2:

- Принцип наименьшего действия. Лагранжиан и плотность лагранжиана.
- Уравнения Лагранжа.
- Гамильтониан, импульс, момент количества движения.
- Пример лагранжева подхода для уравнений Максвелла.
- Тензор напряженности электромагнитного поля.

III. Электромагнитное поле (две лекции).

Лекция N3:

- Решение уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля в калибровке Лоренца.
- Энергия и импульс классического электромагнитного поля.

- Задача о гармоническом осцилляторе в пространстве Фока.
- Квантование электромагнитного поля как набора гармонических осцилляторов.
- Операторы рождения и уничтожения. Коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения.
- 4-потенциал, энергия и импульс квантованного электромагнитного поля.
- Калибровка Лоренца для квантованного электромагнитного поля. Решение проблеммы скалярных и продольных фотонов.

Лекция N4:

- Калибровочные преобразования и вектора поляризации.
- Суммирование по поляризациям. Матрица плотности фотонов.
- Коммутационные соотношения для операторов электромагнитного поля. Перестановочная функция $D_0^{\mu\nu}(x) = i\,[A^\mu(x), A^\nu(0)]$ электромагнитного поля.
- Вакуумные средние и функции $D_\pm^{\mu\nu}(x)$.
- Определения нормального и хронологического произведений. Свертка операторов электромагнитного поля.
- Связь свертки с вакуумным средним и причинной функцией Грина $D_c^{\mu\nu}(x)$. Введение термина "пропагатор".
- Правила обхода полюсов в пропагаторе виртуального фотона.

IV. Дираковское поле (семь лекций).

Лекция N5:

- Что говорит эксперимент о частицах и античастицах?
- Уравнение Паули. Алгебра матриц Паули.
- Уравнение Клейна – Гордона – Фока.
- Вывод уравнения Дирака для свободного фермиона в несимметричной форме. Естественное возникновение биспиноров.
- Симметричная форма уравнения Дирака. Явный вид γ-матриц в стандартном представлении (представлении Паули-Дирака). Спиральное и спинорное представления.

- Решение уравнения Дирака для свободной частицы с положительной энергией $u(\vec{p},\,\lambda)$ в стандартном представлении. Нормировка решения.

  Лекция N6:

- Алгебра матриц Дирака.
  - Свойства матриц γ^5 и $\sigma^{\mu\nu}$.
  - Вычисление следов от произведений матриц Дирака.
  - Разложение произведений матриц Дирака по базису.
  - Свертки по индексам и другие полезные формулы.

  Лекции N7–N10:

- Введение внешнего поля в уравнение Дирака ($p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$, где $e = -|e|$).
- Уравнение Дирака для античастицы ($e \to -e$).
- Операция зарядового сопряжения дираковского поля.
- Явный вид оператора зарядового сопряжения в стандартном представлении ($C = i\gamma^2\gamma^0$) и его свойства.
- Решение уравнения Дирака для свободной античастицы в стандартном представлении $v(\vec{p},\,\lambda)$. Нормировка решения.
- Релятивистский обобщение оператора спина 1/2 и проекционного оператора.
- Преобразование Фолди–Вутхайзена.
- Определение спиральности.
- Соотношение $v(\varepsilon,\,\vec{p},\,\lambda) = u(-\varepsilon,\,-\vec{p},\,-\lambda)$ в плоскости комплексной энергии ε.
- Матрица плотности для свободного решения уравнения Дирака.
- Лагранжиан свободного дираковского поля.
- Введение взаимодействия с электромагнитным полем.
- Энергия, импульс и заряд свободного дираковского поля.
- Квантование свободного решения. Принцип Паули. Коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения.
- Вакуумные средние произведения операторов дираковского поля.

- Определение нормального и хронологического произведений операторов дираковского поля
- Свертка операторов дираковского поля. Связь свертки с вакуумным средним и функцией Грина.
- Пропагатор дираковского поля и правило обхода полюсов.
- Полный лагранжиан КЭД.
- Глобальные калибровочные преобразования. Сохранение заряда.
- Локальные калибровочные преобразования. Фиксация вида взаимодействия.
- Операция пространственного сопряжения для электромагнитного и дираковского полей.
- Операция обращения времени для электромагнитного и дираковского полей.
- Зарядовая четность фотона и теорема Фарри.
- CPT – теорема на примере КЭД. Экспериментальная проверка CPT – теоремы.

  Лекция N11:

- Точное решение уравнения Дирака для электрона в поле плоской электромагнитной волны (решение Волкова).

V. S**–матрица и правила Фейнмана** (три лекции).

  Лекции N12 – N14:

- Гамильтониан взаимодействия в КЭД.
- Представления Шредингера и Гейзенберга.
- Представление взаимодействия. Особая роль представления взаимодействия в квантовых теориях поля.
- Матрица рассеяния (S-матрица) и ее запись в виде ряда.
- Теорема Вика (без доказательства).
- Вывод правил Фейнмана для КЭД на примере вычисления матричных элементов процессов $e^- \to e^-\gamma$, $\gamma \to e^+e^-$ (нефизические).

- Продолжение вывода правил Фейнмана для КЭД на примере вычисления матричных элементов процессов $e^-\gamma \to e^-\gamma$ (эффект Комптона) и реакции $e^-e^- \to e^-e^-$.
- Правила Фейнмана для вычисления петлевых диаграм (без вывода).

VI. Сечения, ширины распадов и кинематика.

Лекция N15:

- Выражение для вероятности перехода $i \to f$ в единицу времени через $\left\langle f \left| S^{(n)} \right| i \right\rangle$.
- Плотность конечных состояний и фазовый объем.
- Выражение для ширины распадов.
- Выражение для сечения реакции $2 \to n$.
- Выражение для сечения реакции $2 \to 2$.
- Мандельстамовские переменные.
- Кросс-каналы и физические области.

VII. Вычисление процессов в КЭД (пять лекций).

Лекции N16 – N20:

- Вычисления для эффекта Комптона $e^-\gamma \to e^-\gamma$.
- Сечение реакции аннигиляции электрон–позитронной пары в мюоны: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.
- Сечение e^+e^-–аннигиляции в адроны и заряды кварков.
- *Поля массивных векторных частиц.*
- *Пропагатор нестабильной векторной частицы.*
- Сечение e^+e^-–аннигиляции в адроны вблизи резонансов и формула Брейта–Вигнера.
- Поля заряженных скалярных мезонов.
- Избранные вопросы "скалярной КЭД".
- Рассеяние электрона на пионе $e^-\pi^- \to e^-\pi^-$. Электромагнитный формфактор заряженного пиона $F_\pi(q^2)$.
- Излучение мягких фотонов. Инфракрасная катастрофа.
- *Излучение электроном фотона в поле плоской электромагнитной волны.*

VIII. Вычисления в квантовой хромодинамике (четыре лекции или *шесть лекций*).

<u>Лекции N21 – N24</u>:

- Обоснования квантовой хромодинамики (КХД).
- Лагранжиан КХД. Цветовые степени свободы.
- Алгебра матриц Гелл-Манна.
- Рассеяние кварка на кварке в ультрарелятивистском случае.
- Правила Фейнмана для трехглюонной вершины.
- Слияние глюонов в кварки.
- Правила Фейнмана для четырехглюонной вершины.
- Рассеяние глюона на глюоне.

<u>*Лекции N25 – N26 (дополнительные)*</u>:

- *Сложная структура вакуума КХД. Конденсаты.*
- *Поправки за счет кварковых и глюонных конденсатов к пропагаторам кварка и глюона.*

Литература к лекциям.

- Основная литература.

  1. С.М.Биленький, "Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия", М. "Энергоатомиздат" 1990.

  2. А.А.Соколов, И.М.Тернов, В.Ч.Жуковский, А.В.Борисов, "Квантовая электродинамика", М. "Из-во МГУ" 1983.

  3. А.А.Соколов, И.М.Тернов, В.Ч.Жуковский, А.В.Борисов, "Калибровочные поля", М. "Из-во МГУ" 1986.

- Дополнительная основная литература.

  1. Р.Фейнман, "Квантовая электродинамика", М. "Наука" 1964.

  2. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, "Квантовая электродинамика", М. "Наука" 1984.

  3. М.Б.Волошин, К.А.Тер–Мартиросян, "Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц", М. "Энергоатомиздат", 1984.

- Дополнительная литература.

  1. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, А.П.Питаевский, "Квантовая электродинамика", М. "Наука" 1989.

  2. М.Пескин, Д.Шредер, "Введение в квантовую теорию поля", М. "РХД" 2001.

  3. Л.Б.Окунь, "Лептоны и кварки", М. "Наука" 1990.

  4. Ф.Хелзен, А.Мартин, "Кварки и лептоны. Введение в физику частиц", М. "УРСС" 2000.

- Литература для углубленного изучения.

  1. К.Ициксон, Ж.Б.Зюбер, "Квантовая теория поля" в двух томах, М. "Мир" 1984.

  2. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Квантовые поля", М. "Наука" 1993.

  3. Ф.Индурайн, "Квантовая хромодинамика", М. "Мир" 1986.

  4. В.А.Рубаков, "Классические калибровочные поля", М. "УРСС", 1999.

  5. А.А.Соколов, И.М.Тернов, "Релятивистский электрон", М. "Наука" 1983.

  6. W.Greiner, S.Schramm, E.Stein, "Quantum Chromodynamics", "Springer" 2002.

  7. Q.Ho-Kim, P.X.Yem, "Elementary Particles and Their Interactions", "Springer" 1998.

  8. L.J.Reinders, H.Rubinstein, S.Yazaki, "Hadron Properties from QCD Sum Rules", Phys.Rep. **127**, pp.1-97, 1985.

Требования к получению зачета

Для того чтобы получить зачет по курсу, каждый студент обязан решить больше половины не отмеченных "$*$" задач из задания, ответить на теоретический вопрос из программы курса (по выбору) и выполнить полный расчет **ОДНОГО из нижеперечисленных каналов**:

КЭД	*"Скалярная КЭД"*	*КХД*
$e^- e^- \to e^- e^-$, $m_e = 0$	$\pi^- \pi^+ \to \pi^- \pi^+$, $m_\pi \neq 0$	$q\, q \to q\, q$, $m_q = 0$
$e^+ e^- \to e^+ e^-$, $m_e = 0$	$\pi^+ \pi^- \to \pi^+ \pi^-$, $m_\pi \neq 0$	$q\, \bar{q} \to q\, \bar{q}$, $m_q = 0$
$e^+ e^+ \to e^+ e^+$, $m_e = 0$	$\pi^+ \pi^+ \to \pi^+ \pi^+$, $m_\pi \neq 0$	$\bar{q}\, \bar{q} \to \bar{q}\, \bar{q}$, $m_q = 0$
$e^+ \gamma \to e^+ \gamma$, $m_e \neq 0$	$\pi^+ \gamma \to \pi^+ \gamma$, $m_\pi \neq 0$	$q\, g \to q\, g$, $m_q = 0$
$e^+ e^- \to \gamma\gamma$, $m_e \neq 0$	$\pi^+ \pi^- \to \gamma\gamma$, $m_\pi \neq 0$	$q\, \bar{q} \to g\, g$, $m_q = 0$
$\gamma\gamma \to e^+ e^-$, $m_e \neq 0$	$\gamma\gamma \to \pi^+ \pi^-$, $m_\pi \neq 0$	$g\, g \to q\, \bar{q}$, $m_q = 0$

В данном контексте пионы понимаются как скалярные частицы, участвующие **только** в электромагнитном взаимодействии.

Решение каждой задачи в обязательном порядке должно содержать:

- Диаграммы Фейнмана для процесса;
- Выражение для iM_{fi}, полученное по правилам Фейнмана;
- Дифференциальное сечение процесса, записанное при помощи мандельстамовских переменных;
- Угловое распределение дифференциального сечения в системе центра масс сталкивающихся частиц;
- Исследование ультрарелятивистского случая (в задачах, где $m \neq 0$).
- Исследование нерелятивистского случая.

Над каждым каналом могут работать максимум два человека.

Важнейшие определения и формулы

Система $\hbar = c = 1$ + СГС + рациональная система Хевисайда

В данной системе единиц скорость $\vec{v}$, действие S, момент импульса (полный момент $\vec{J}$, орбитальный момент, спин) и электрический заряд являются безразмерными величинами:

$$[\vec{v}] = [S] = [\vec{J}] = [e_{СГС}] = 1.$$

Энергия E, импульс $\vec{p}$, обратная длина x^{-1} и обратное время t^{-1} имеют размерность массы m, то есть

$$[E] = [\vec{p}] = [x^{-1}] = [t^{-1}] = [m].$$

Сила $\vec{F}$, напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей имеют размерность массы в квадрате, то есть

$$[\vec{F}] = [\vec{E}_{СГС}] = [\vec{D}_{СГС}] = [\vec{H}_{СГС}] = [\vec{B}_{СГС}] = [m^2] = [x^{-2}].$$

Из размерности лагранжиана L легко получить размерности тензора напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$, операторов электромагнитного $A^\mu(x)$ и спинорного $\psi(x)$ полей:

$$[L] = [m^4], \quad \Rightarrow \quad [F^{\mu\nu}] = [m^2], \quad [A^\mu(x)] = [m], \quad [\psi(x)] = [m^{3/2}].$$

В выбранной системе единиц постоянная тонкой структуры $\alpha_{em} = e^2/4\pi = 1/137$, закон Кулона выглядит как $|\vec{F}| = \alpha_{em}\, q_1\, q_2/r^2$, где заряды q_1 и q_2 выражены в единицах заряда электрона $e = -|e|$ а уравнения Максвелла не содержат никаких специальных констант:

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{D} = \rho \\ div\vec{B} = 0 \end{cases}$$

В качестве единицы измерения примем 1 электронвольт (эВ) и его степени. Тогда

$$1\,\textit{ГэВ} \approx 1,78 \times 10^{-24}\,\textit{гр.} \approx 1,6 \times 10^{-10}\,\textit{Дж};$$

$$1\,\textit{ГэВ}^{-1} \approx 6,58 \times 10^{-25}\,\textit{сек} \approx 1,97 \times 10^{-14}\,\textit{см.};$$

$$|e| \times 1\,\textit{Тл} \approx 57\,\textit{эВ}^2.$$

Основные определения в пространстве Минковского

Контравариантный 4-вектор имеет компоненты $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A})$. Ковариантный вектор определяется как $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A^0, -\vec{A})$, где $g^{\mu\nu}$-метрический тензор в пространстве Минковского:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее всегда будем подразумевать, что по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. При этом греческие индексы α, ..., μ, ν и т.д. изменяются от 0 до 3, а латинские индексы i, j, k и т.д. от 1 до 3.

Примеры 4–векторов: $x^\mu = (t, \vec{x})$ и $p^\mu = (E, \vec{p})$.

Скалярное произведение двух 4–векторов A^μ и B^ν определяется как:
$(AB) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = A_\nu B^\nu = A^0 B^0 - (\vec{A}\vec{B})$. Очевидно, что квадрат любого 4–вектора является релятивистским инвариантом.

4-градиент в пространстве Минковского определяется по формуле:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right).$$

Основываясь на этом определении можно ввести четырехмерный оператор энергии–импульса по формуле $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu$, который воспроизводит определения уравнения Шредингера и оператора импульса в координатном представлении нерелятивистской квантовой механики.

Символом Кронеккера называется величина

$$\delta^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu = \delta^\nu_\mu = g_{\nu\eta} g^{\mu\eta} = g^\mu_\nu = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Псевдотензором 4–ого ранга (или псевдотензором Леви-Чивиты) называется полностью антисимметричный тензор 4-ого ранга, т.е. тензор для которого $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}$, равно как и при перестановке любых двух соседних индексов. Ненулевые компоненты псевдотензора (их всего 24 штуки) полностью фиксированны дополнительным определением $\varepsilon^{0123} = -1$. Легко показать, что $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Свертки по различному числу индексов дают:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -4!, \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\nu\alpha\beta} = -3!\,\delta^{\mu}_{\zeta}, \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\alpha\beta} = -2!\,\det\begin{pmatrix} \delta^{\mu}_{\zeta} & \delta^{\mu}_{\eta} \\ \delta^{\nu}_{\zeta} & \delta^{\nu}_{\eta} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\xi\beta} = -1!\,\det\begin{pmatrix} \delta^{\mu}_{\zeta} & \delta^{\mu}_{\eta} & \delta^{\mu}_{\xi} \\ \delta^{\nu}_{\zeta} & \delta^{\nu}_{\eta} & \delta^{\nu}_{\xi} \\ \delta^{\alpha}_{\zeta} & \delta^{\alpha}_{\eta} & \delta^{\alpha}_{\xi} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\zeta\eta\xi\chi} = -0!\,\det\begin{pmatrix} \delta^{\mu}_{\zeta} & \delta^{\mu}_{\eta} & \delta^{\mu}_{\xi} & \delta^{\mu}_{\chi} \\ \delta^{\nu}_{\zeta} & \delta^{\nu}_{\eta} & \delta^{\nu}_{\xi} & \delta^{\nu}_{\chi} \\ \delta^{\alpha}_{\zeta} & \delta^{\alpha}_{\eta} & \delta^{\alpha}_{\xi} & \delta^{\alpha}_{\chi} \\ \delta^{\beta}_{\zeta} & \delta^{\beta}_{\eta} & \delta^{\beta}_{\xi} & \delta^{\beta}_{\chi} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что по определению $0! = 1$.

При получении общих решений волнового уравнения и уравнения Дираки равноправно используются как суммирование, так и интегрирование по всем возможным импульсам частиц. В этом случае как эквивалентные используются следующие записи:

$$\sum_{\vec{p}} \Leftrightarrow \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}$$

и

$$\delta_{\vec{p}\vec{p}'} \Leftrightarrow (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}').$$

Квантованное электромагнитное поле

Оператор 4-потенциала электромагнитного поля имеет вид

$$A^\mu(x) \,=\, \sum_\lambda \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\,\left(e^\mu(\vec{k},\lambda)c_{\vec{k},\lambda}e^{-i(kx)} \,+\, e^{*\mu}(\vec{k},\lambda)c^\dagger_{\vec{k},\lambda}e^{i(kx)}\right),$$

где $c_{\vec{k},\lambda}$ – оператор уничтожения фотона с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ; $c^\dagger_{\vec{k},\lambda}$ – оператор рождения фотона с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ; $e^\mu(\vec{k},\lambda)$ – вектор поляризации, отвечающий поляризации λ. Операторы рождения и уничтожения подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$\left[c_{\vec{k},\lambda}, c^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right] \,=\, \delta_{\vec{k}\,\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} \,=\, (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')\delta_{\lambda\lambda'}; \quad \left[c_{\vec{k},\lambda}, c_{\vec{k}',\lambda'}\right] \,=\, \left[c^\dagger_{\vec{k},\lambda'}, c^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right] \,=\, 0$$

и действуют на состояния $|\,\gamma\,\rangle$, выраженные в числах заполнения фотонов, по правилам

$$c_{\vec{k},\lambda}\,|\,1\gamma_{\vec{k},\lambda}\,\rangle \,=\, |\,0\,\rangle\,, \quad c_{\vec{k},\lambda}\,|\,0\,\rangle \,=\, 0, \quad c^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,|\,0\,\rangle \,=\, |\,1\gamma_{\vec{k},\lambda}\,\rangle\,.$$

В калибровке Лоренца выбор состояний $|\,\gamma\,\rangle$ подчиняется условию

$$\langle\,\gamma\,|\,\partial_\mu\,A^\mu(x)\,|\,\gamma\,\rangle \,=\, 0,$$

которое автоматически уничтожает во всех наблюдаемых вклад нефизических продольной и скалярной поляризаций фотона.

Выполняется следующее правило суммирования по векторам поляризации:

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e^\mu(\vec{k},\lambda)\,e^\nu(\vec{k},\lambda) \,=\, -g^{\mu\nu}.$$

Свертка операторов электромагнитного поля $A^\mu(x)$ и $A^\nu(0)$ выражается через причинную функцию Грина $D^{\mu\nu}_c(x)$ или иначе – пропагатор:

$$A\underbrace{^\mu(x)A^\nu}(0) = \langle\,0\,|\,A\underbrace{^\mu(x)A^\nu}(0)\,|\,0\,\rangle = \langle\,0\,|\,T\left(A^\mu(x)A^\nu(0)\right) \,-\, N\left(A^\mu(x)A^\nu(0)\right)|\,0\,\rangle \,=\, -iD^{\mu\nu}_c(x).$$

Пропагатор $D^{\mu\nu}_c(x)$ является релятивистским инвариантом и может быть записан в виде

$$D^{\mu\nu}_c(x) \,=\, \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-i(kx)}D^{\mu\nu}_c(k),$$
$$D^{\mu\nu}_c(k) \,=\, \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 \,+\, i\varepsilon},$$

где $D^{\mu\nu}_c(k)$ – импульсное представление пропагатора.

Алгебра матриц Паули

Введем псевдотензор Леви-Чивиты 3-его ранга ε^{ijk}, то есть $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$. Легко видеть, что $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$. Чтобы полностью фиксировать ненулевые компоненты псевдотензора определим $\varepsilon^{123} = +1$. Эти определения совместны с определением псевдотензора $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ в пространстве Минковского. Символ Кронеккера δ^{ij} определяется точно так же, как для пространства Минковского, и в данном случае совпадает с метрическим тензором.

Самая общая свертка двух псевдотензоров третьего ранга по индексам имеет вид:

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn} = 0!\,\det\begin{pmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_n \\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_n \end{pmatrix}.$$

Матрицы Паули σ^i и единичная матрица $\hat{1}$ определены следующим образом:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы образуют базис в пространстве для матриц 2×2, то есть любое произведение $\sigma^{i_1}\sigma^{i_2}...\sigma^{i_n}$ может быть разложено по этому базису. Легко непосредственно проверить, что

$$\sigma^{i\,\dagger} = \sigma^i, \qquad \left(\sigma^i\right)^2 = \hat{1}, \qquad Sp\left(\sigma^i\right) = 0, \qquad Sp\left(\hat{1}\right) = 2.$$

Самая важная формула в алгебре матриц Паули:

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\hat{1} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k.$$

Из нее следуют соотношения для коммутатора и антикоммутатора двух матриц Паули

$$\left[\sigma^i,\, \sigma^j\right] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \qquad \left\{\sigma^i,\, \sigma^j\right\} = 2\delta^{ij}\hat{1}.$$

Кроме того, удобно помнить простые соотношения

$$\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = i\hat{1}, \qquad (\vec{\sigma}\,\vec{a})^2 = \vec{a}^2\,\hat{1}, \qquad (\vec{\sigma}\,\vec{a})\,(\vec{\sigma}\,\vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{c})\,\hat{1} + i\,([\vec{a}\,\vec{c}]\;\vec{\sigma}),$$

которые следуют из выражения для $\sigma^i\sigma^j$.

Наиболее распространенные следы матриц Паули:

$$Sp\left(\sigma^i\sigma^j\right) = 2\delta^{ij}, \quad Sp\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\right) = 2\,i\,\varepsilon^{ijk}, \quad Sp\left(\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l\right) = 2\,\left(\delta^{ij}\delta^{kl} - \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right).$$

Из матриц Паули можно построить два контравариантных 4-вектора σ^μ_+ и σ^μ_-:

$$\sigma^\mu_+ = \left(\hat{1},\, \vec{\sigma}\right), \qquad \sigma^\mu_- = \left(\hat{1},\, -\vec{\sigma}\right) = \sigma_{+\,\mu}.$$

Алгебра матриц Дирака

Четыре эрмитовские матрицы: матрица β и три матрицы α^i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ подчиняются следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2I\delta^{ij}, \quad \{i,\, j\} = \{1,\, 2,\, 3\};$$
$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0, \quad \beta^2 = I, \quad i = \{1,\, 2,\, 3\}.$$

Для симметричной записи уравнения Дирака вводят четыре матрицы γ^μ, $\mu = \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$ согласно условию $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$, $i = \{1,\, 2,\, 3\}$. Эти матрицы называются матрицами Дирака. При таком определении матрица γ^0 остается эрмитовской, в то время как матрицы γ^i становятся антиэрмитовскими, то есть

$$\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\,\dagger} = -\gamma^i, \quad i = \{1,\, 2,\, 3\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\gamma^0\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu.$$

Из матриц Дирака можно составить матричный контравариантный 4–вектор

$$\gamma^\mu = \left(\gamma^0,\, \gamma^1,\, \gamma^2,\, \gamma^3\right) = \left(\gamma^0,\, \vec{\gamma}\right)$$

и матричный ковариантный 4-вектор $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = (\gamma^0,\, -\vec{\gamma})$. Эти вектора используются при записи уравнения Дирака.

Из антикоммутационных соотношений для матриц α^i и β следует антикоммутационное соотношение для матриц γ^μ

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2Ig^{\mu\nu}.$$

Это самое главное соотношение в теории матриц Дирака, из которого выводятся все остальные операции с γ–матрицами. Заметим, что согласно данному антикоммутационному соотношению $\left(\gamma^0\right)^2 = I$, но $\left(\gamma^1\right)^2 = \left(\gamma^2\right)^2 = \left(\gamma^3\right)^2 = -I$.

Определим матрицу γ^5 в виде

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\gamma^{5\,\dagger} = \gamma^5, \quad \left(\gamma^5\right)^2 = I, \quad \gamma^5 = \frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta, \quad \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0.$$

В пространстве матриц 4×4 шестнадцать матриц I, γ^5, γ^μ, $\gamma^\mu\gamma^5$ и

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

образуют базис. По этому базису раскладывается любое произведение матриц Дирака. Наиболее часто используемые разложения:

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha\gamma^\beta &= I g^{\alpha\beta} - i\sigma^{\alpha\beta}, \\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma &= \left(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\mu} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\mu} + g^{\beta\gamma}g^{\alpha\mu}\right)\gamma_\mu - i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\gamma_\mu\gamma^5, \\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^5 &= g^{\alpha\beta}\gamma^5 - \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu, \\
\sigma^{\alpha\beta}\gamma^5 &= -\frac{i}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

При вычислении следов матриц Дирака используется тот факт, что след нечетного числа γ–матриц равен нулю. Другие часто используемые следы:

$$\begin{aligned}
& Sp\,(I) = 4, \\
& Sp\left(\gamma^5\right) = 0, \\
& Sp\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4g^{\mu\nu}, \\
& Sp\left(\sigma^{\mu\nu}\right) = 0, \\
& Sp\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 0, \\
& Sp\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) = 4\,\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right), \\
& Sp\left(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right) = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}, \\
& Sp\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) = 4i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \\
& Sp\left(\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right) = -4i\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \\
& Sp\left(\gamma^5\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\alpha_5}\gamma^{\alpha_6}\right) = 4i\,\left[g^{\alpha_1\alpha_2}\varepsilon^{\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6} - g^{\alpha_1\alpha_3}\varepsilon^{\alpha_2\alpha_4\alpha_5\alpha_6} + g^{\alpha_2\alpha_3}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_4\alpha_5\alpha_6} + \right. \\
& \qquad\qquad \left. g^{\alpha_4\alpha_5}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6} - g^{\alpha_4\alpha_6}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5} + g^{\alpha_5\alpha_6}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\right].
\end{aligned}$$

Используя соотношение антикоммутации матриц Дирака след произведения $2n$ матриц всегда можно свести к сумме следов от произведения $2(n-1)$ матриц, умноженных на $g^{\mu_i\mu_j}$. Таким образом можно вычислять следы шести и более матриц Дирака.

Часто несколько матриц, входящих в шпур, имеют одинаковые лоренцовские индексы. Тогда удобно воспользоваться следующими формулами для свертывания по этим индексам:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4I,$$

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}I,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma_\mu = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha,$$

Для вычисления следов большого числа γ–матриц рекомендуется пользоваться какой–либо программой символьных вычислений. Например, высокопрофессиональной свободнораспространяемой программой FORM, которую можно скачать из сети по адресу: *http://www.nikhef.nl/ form/FORMdistribution/index.html* .

В явном виде матрицы Дирака можно представить бесконечным числом различных способов. Среди всех представлений наиболее часто используется так называемое **стандартное представление** или **представление Паули–Дирака**. В этом представлении

$$I = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

В литературе встречаются **спиральное** или **вейлевское представление**

$$I = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_+ \\ \sigma^\mu_- & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}$$

и **спинорное представление**:

$$I = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_- \\ \sigma^\mu_+ & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы Дирака всех трех представлений связаны между собой унитарными преобразованиями.

В практических вычислениях для сечений и ширин процессов в квантовой теории поля встречаются не просто матрицы Дирака, а их свертки с 4-векторами. Например, $\gamma^\mu a_\mu$. Подобные свертки для краткости принято обозначать через $\hat{a}$. Подчеркнем, что "крышечка" над 4-вектором не имеет ничего общего с обозначением оператора в квантовой механике. Все выражения с γ-матрицами легко обобщаются на их свертки с 4-векторами. Приведем два важных с практической точки зрения примера:

$$Sp\left(\hat{a}\,\hat{b}\right) = Sp\,(\gamma^\mu\gamma^\nu)\; a_\mu\, b_\nu = 4g^{\mu\nu} a_\mu\, b_\nu = 4\;(a\, b)$$

и

$$(\hat{a})^2 = \hat{a}\,\hat{a} = \gamma^\alpha\gamma^\beta\, a_\alpha\, a_\beta = \left(I\, g^{\alpha\beta} - i\sigma^{\alpha\beta}\right)\, a_\alpha\, a_\beta = I\, g^{\alpha\beta}\, a_\alpha\, a_\beta = I\, a^2.$$

Решение свободного уравнения Дирака в стандартном представлении

Симметричная форма свободного уравнения Дирака имеет вид:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \,-\, Im)\,\psi(x) \,=\, 0,$$

где m – масса частицы, γ^μ – матрицы Дирака, общие свойства которых и явный вид для стандартного представления приведены в разделе "Алгебра матриц Дирака", I – единичная матрица размерности 4×4. Частное решение уравнения Дирака для положительной энергии фермиона ($\varepsilon_p \,>\, 0$) ищется в виде:

$$\psi_{\vec{p},\,\lambda}(x) \,=\, \frac{1}{\sqrt{2\,\varepsilon_p}}\, u(\vec{p},\lambda)\, e^{-i(px)},$$

где $p^\mu \,=\, (\varepsilon_p,\, \vec{p})$ – 4-импульс свободной частицы, $\lambda \,=\, 2s \,=\, \pm\, 1$ – удвоенная проекция спина фермиона s на выбранную ось, $u(\vec{p},\lambda)$ – четырехкомпонентный спинор (биспинор). Для решения уравнения Дирака биспинор $u(\vec{p},\lambda)$ удобно представить в виде столбца из двух спиноров

$$u(\vec{p},\lambda) \,=\, N_{\vec{p}} \begin{pmatrix} \chi_\lambda(\vec{p}) \\ \eta_\lambda(\vec{p}) \end{pmatrix}.$$

Нормировка решения $\psi_{\vec{p},\,\lambda}(x)$ на одну частицу в единице объема

$$\int d\vec{x}\, \psi^\dagger_{\vec{p},\,\lambda}(x)\, \psi_{\vec{p},\,\lambda'}(x) \,=\, \delta_{\lambda\lambda'}$$

приводит к следующей нормировке для $u(\vec{p},\lambda)$

$$u(\vec{p},\lambda)^\dagger\, u(\vec{p},\lambda') \,=\, 2\,\varepsilon_p\, \delta_{\lambda\lambda'},$$

или в релятивистски–инвариантном виде:

$$\bar{u}(\vec{p},\lambda)\, u(\vec{p},\lambda') \,=\, 2\, m\, \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Подстановка решения $u(\vec{p},\lambda)$ в свободное уравнение Дирака в стандартном представлении дает

$$u(\vec{p},\lambda) \,=\, N_{\vec{p}} \begin{pmatrix} \chi_\lambda(\vec{p}) \\ \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{\varepsilon_p + m}\, \chi_\lambda(\vec{p}) \end{pmatrix}.$$

Если на спинор $\chi_\lambda(\vec{p})$ наложить стандартное условие нормировки

$$\chi_\lambda(\vec{p})^\dagger\, \chi_{\lambda'}(\vec{p}) \,=\, \delta_{\lambda\lambda'},$$

то множитель $N_{\vec{p}} = \sqrt{\varepsilon_p + m}\, e^{i\alpha}$. Нефизическая фаза α может быть положена нулю (как это обычно делается в нерелятивистской квантовой механике). Тогда решение $u(\vec{p}, \lambda)$ записывается в виде:

$$u(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_p + m}\, \chi_\lambda(\vec{p}\,) \\ \sqrt{\varepsilon_p - m}\, \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{|\vec{p}|}\, \chi_\lambda(\vec{p}\,) \end{pmatrix}.$$

Частное решение уравнения дирака с отрицательной энергией совпадает с частным решением уравнения Дирака для античастицы $v(\vec{p}, \lambda)$ (естественно, что энергия античастицы является положительной!), и в стандартном представлении может быть записано в виде:

$$\psi^c_{\vec{p},\lambda}(x) = C\, \bar{\psi}^T_{\vec{p},\lambda}(x) = i\, \gamma^2\, \gamma^0\, \bar{\psi}^T_{\vec{p},\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\varepsilon_p}}\, v(\vec{p}, \lambda)\, e^{i(px)},$$

где $C = i\, \gamma^2\, \gamma^0$ – оператор зарядового сопряжения для фермионов в стандартном представлении. Биспинор $v(\vec{p}, \lambda)$ может быть записан в виде

$$v(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon_p - m}\, \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{|\vec{p}|}\, \xi_{-\lambda}(\vec{p}\,) \\ -\sqrt{\varepsilon_p + m}\, \xi_{-\lambda}(\vec{p}\,) \end{pmatrix}.$$

Биспинор $v(\vec{p}, \lambda)$ удовлетворяет следующим условиям нормировки

$$v(\vec{p}, \lambda)^\dagger\, v(\vec{p}, \lambda') = 2\, \varepsilon_p\, \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad \bar{v}(\vec{p}, \lambda)\, v(\vec{p}, \lambda') = -\, 2\, m\, \delta_{\lambda\lambda'},$$

а спиноры $\chi_\lambda(\vec{p}\,)$ и $\xi_{-\lambda}(\vec{p}\,)$ связаны условием:

$$\xi_{-\lambda}(\vec{p}\,) = i\, \sigma^2\, \chi^*_\lambda(\vec{p}\,).$$

Для получения явного вида спинора $\chi_\lambda(\vec{p}\,)$, необходимо дополнительно потребовать, чтобы биспинор $u(\vec{p}, \lambda)$ являлся собственной функцией релятивистского обобщения проекционного оператора спина $1/2$ для собственных значений $\lambda = \pm 1$.

В стандартном представлении одно из возможных обобщений оператора спина $1/2$ имеет вид:

$$\frac{1}{2}\, \vec{O} = \frac{1}{2} \left(-\, \gamma^5\, \vec{\gamma} + \frac{\vec{p}}{\varepsilon_p}\, \gamma^5 + \frac{\vec{p}\, \gamma^5\, (\vec{\gamma}\, \vec{p})}{\varepsilon_p\, (\varepsilon_p + m)} \right).$$

Тогда необходимое условие имеет вид

$$\left(\vec{n}\, \vec{O} \right) u(\vec{p}, \lambda) = \lambda\, u(\vec{p}, \lambda), \quad \lambda = \pm 1.$$

Если в качестве направления $\vec{n}$ выбрать направление импульса частицы (т.е. $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}\,|$), то λ будет иметь смысл спиральности фермиона (не путать спиральность частицы со спиральным представлением!), и соответствующие спиноры будут иметь вид

$$\chi(\vec{p})_{\lambda=+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\; e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2)\; e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \qquad \chi(\vec{p})_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)\; e^{-i\phi/2} \\ \cos(\theta/2)\; e^{i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

Для спиноров $\xi(\vec{p})_{-\lambda}$ легко получить:

$$\xi(\vec{p})_{-\lambda=-1} = -\chi(\vec{p})_{\lambda=-1}, \quad \xi(\vec{p})_{-\lambda=+1} = +\chi(\vec{p})_{\lambda=+1}.$$

Таким образом, общие решения свободного уравнения Дирака имеют вид:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\psi^c_{\vec{p},\lambda}(x) + \psi^c_{\vec{p},\lambda}(x)\right) = \\
&= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_{\vec{p},\lambda}\, u(\vec{p},\,\lambda)\, e^{-i(px)} + b^\dagger_{\vec{p},\lambda}\, v(\vec{p},\,\lambda)\, e^{i(px)}\right), \\
\bar{\psi}(x) &= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\bar{\psi}^c_{\vec{p},\lambda}(x) + \bar{\psi}^c_{\vec{p},\lambda}(x)\right) = \\
&= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a^\dagger_{\vec{p},\lambda}\, \bar{u}(\vec{p},\,\lambda)\, e^{i(px)} + b_{\vec{p},\lambda}\, \bar{v}(\vec{p},\,\lambda)\, e^{-i(px)}\right),
\end{aligned}$$

где $a_{\vec{p},\lambda}$ и $b_{\vec{p},\lambda}$ – произвольные комплексные коэффициенты, которые после выполнения операции вторичного квантования станут операторами уничтожения фермиона и антифермиона (см. раздел "Квантованное дираковское поле").

Решение Волкова для уравнения Дирака

Решение уравнения Дирака для фермиона или антифермиона в плосковолновом электромагнитном поле называется решением Волкова. Это пример одного из немногих **точных решений** уравнения Дирака.

...

Нормальное и хронологическое произведения, свертка

Квантованное дираковское поле

Квантованное свободное дираковское поле описывается при помощи двух операторов поля:

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) = \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_{\vec{p},\lambda}\, u(\vec{p},\,\lambda)\, e^{-i(px)} + b^\dagger_{\vec{p},\lambda}\, v(\vec{p},\,\lambda)\, e^{i(px)}\right),$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(x) = \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a^\dagger_{\vec{p},\lambda}\, \bar{u}(\vec{p},\,\lambda)\, e^{i(px)} + b_{\vec{p},\lambda}\, \bar{v}(\vec{p},\,\lambda)\, e^{-i(px)}\right),$$

где значек $(+)$ означает положительно частотную часть оператора, а значек $(-)$ – отрицательно частотную часть. Оператор $a_{\vec{p},\lambda}$ уничтожает фермион с импульсом $\vec{p}$ и спиральностью λ; оператор $a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}$ рождает фермион с импульсом $\vec{p}$ и спиральностью λ; оператор $b_{\vec{p},\lambda}$ уничтожает **анти**фермион с импульсом $\vec{p}$ и спиральностью λ и оператор $b^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}$ рождает **анти**фермион с импульсом $\vec{p}$ и спиральностью λ; $u(\vec{p},\,\lambda)$ и $v(\vec{p},\,\lambda)$ – четырехкомпонентные спиноры, описанные в разделе "Решение свободного уравнения Дирака в стандартном и спиральном представлениях". Операторы рождения и уничтожения подчиняются следующим **анти**коммутационным соотношениям:

$$\left\{a_{\vec{p},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{\lambda\lambda'} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad \left\{b_{\vec{p},\lambda}, b^{\dagger}_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{\lambda\lambda'} = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{\lambda\lambda'},$$
$$\{a_{\vec{p},\lambda}, a_{\vec{p}',\lambda'}\} = \left\{a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = \{b_{\vec{p},\lambda}, b_{\vec{p}',\lambda'}\} = \left\{b^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}, b^{\dagger}_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = 0,$$
$$\{a_{\vec{p},\lambda}, b_{\vec{p}',\lambda'}\} = \left\{a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}, b^{\dagger}_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = \left\{a_{\vec{p},\lambda}, b^{\dagger}_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = \left\{a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}, b_{\vec{p}',\lambda'}\right\} = 0$$

и действуют на кет–состояния $|\, e^-,\, e^+\,\rangle$, выраженные в числах заполнения фермионов и антифермионов, по правилам

$$a_{\vec{p},\lambda}\,|\,1e^-_{\vec{p},\lambda}\,\rangle = |\,0\,\rangle\,, \quad a_{\vec{p},\lambda}\,|\,0\,\rangle = 0, \quad a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}\,|\,0\,\rangle = |\,1e^-_{\vec{p},\lambda}\,\rangle\,, \quad \left(a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}\right)^2|\,0\,\rangle = |\,0\,\rangle\,;$$
$$b_{\vec{p},\lambda}\,|\,1e^+_{\vec{p},\lambda}\,\rangle = |\,0\,\rangle\,, \quad b_{\vec{p},\lambda}\,|\,0\,\rangle = 0, \quad b^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}\,|\,0\,\rangle = |\,1e^+_{\vec{p},\lambda}\,\rangle\,, \quad \left(b^{\dagger}_{\vec{p},\lambda}\right)^2|\,0\,\rangle = |\,0\,\rangle\,,$$

которые отражают принцип Паули. Выполняя эрмитовское сопряжение этих выражений, получаем правила действия операторов рождения и уничтожения на бра–состояния:

$$\langle\,1e^-_{\vec{p},\lambda}\,|\,a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda} = \langle\,0\,|\,, \quad \langle\,0\,|\,a^{\dagger}_{\vec{p},\lambda} = 0, \quad \langle\,0\,|\,a_{\vec{p},\lambda} = \langle\,1e^-_{\vec{p},\lambda}\,|\,, \quad \langle\,0\,|\,(a_{\vec{p},\lambda})^2 = \langle\,0\,|\,;$$
$$\langle\,1e^+_{\vec{p},\lambda}\,|\,b^{\dagger}_{\vec{p},\lambda} = \langle\,0\,|\,, \quad \langle\,0\,|\,b^{\dagger}_{\vec{p},\lambda} = 0, \quad \langle\,0\,|\,b_{\vec{p},\lambda} = \langle\,1e^+_{\vec{p},\lambda}\,|\,, \quad \langle\,0\,|\,(b_{\vec{p},\lambda})^2 = \langle\,0\,|\,,$$

Выполняются следующие правила суммирования по спинам (спиральностям) фермионов и антифермионов:

$$\sum_{\lambda=\pm1} u^{\alpha}(\vec{p},\lambda)\bar{u}^{\beta}(\vec{p},\lambda) = (\gamma^{\mu}p_{\mu} + Im)^{\alpha\beta}\,,$$
$$\sum_{\lambda=\pm1} v^{\alpha}(\vec{p},\lambda)\bar{v}^{\beta}(\vec{p},\lambda) = (\gamma^{\mu}p_{\mu} - Im)^{\alpha\beta}\,.$$

Свертка операторов дираковского поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(0)$ выражается через причинную функцию Грина $S_c(x)$ или иначе – пропагатор:

$$\psi\underbrace{(x)\,\bar{\psi}}(0) = \langle\,0\,|\,\psi\underbrace{(x)\,\bar{\psi}}(0)\,|\,0\,\rangle = \langle\,0\,|\,T\left(\psi(x)\bar{\psi}(0)\right) - N\left(\psi(x)\bar{\psi}(0)\right)|\,0\,\rangle = iS_c(x).$$

Пропагатор $S_c(x)$ является релятивистским инвариантом. Для фермиона и антифермиона он может быть записан соответственно в виде

$$S_c(x) \,=\, \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-i(px)} S_c(p), \qquad S_c(p) \,=\, \frac{\gamma^\mu p_\mu \,+\, Im}{p^2 \,-\, m^2 \,+\, i\varepsilon},$$
$$S_c(-\,x) \,=\, \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{i(px)} S_c(-p), \qquad S_c(-\,p) \,=\, \frac{-\,\gamma^\mu p_\mu \,+\, Im}{p^2 \,-\, m^2 \,+\, i\varepsilon},$$

где $S_c(p)$ – импульсное представление пропагатора фермиона, $S_c(-\,p)$ – импульсное представление пропагатора антифермиона.

Полный лагранжиан квантовой электродинамики

Полный лагранжиан КЭД (иногда ее называют "спинорной КЭД", подчеркивая, что фотоны взаимодействуют именно с фермионами) состоит из трех слагаемых

$$\mathcal{L}^{QED}(x) \,=\, \mathcal{L}^A(x) \,+\, \mathcal{L}^0(x) \,+\, \mathcal{L}^{int}(x),$$

где $\mathcal{L}^A(x)$ – лагранжиан свободного электромагнитного (фотонного) поля, $\mathcal{L}^0(x)$ – лагранжиан свободного дираковского поля, $\mathcal{L}^{int}(x)$ – лагранжиан взаимодействия фотонного и дираковского полей.

Для простоты предположим, что помимо фотонов существует только один сорт фундаментальных фермионов. Пусть это будут электроны e^-. Кроме того, должны существовать антифермионы, то есть позитроны e^+. Полный лагранжиан КЭД $\mathcal{L}^{QED}(x)$ как и три его составные части нужно рассматривать в качестве операторов, действующих на вектора состояний

$$|\; n_1\gamma_{\vec{k}_1,\,\lambda_1},\, n_2\gamma_{\vec{k}_2,\,\lambda_2},\, \ldots\,,\, m_1 e^-_{\vec{p}_1,\,s_1}, m_2 e^-_{\vec{p}_2,\,s_2},\, \ldots\,,\, \ell_1 e^+_{\vec{p}^{\,\prime}_1,\,s^\prime_1}, \ell_2 e^+_{\vec{p}^{\,\prime}_2,\,s^\prime_2},\, \ldots \;\rangle\;,$$

где n_i, m_i и ℓ_i – число фотонов, электронов и позитронов, обладающих соответствующим импульсом и спином.

Лагранжиан свободного электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L}^A(x) \,=\, -\,\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x),$$

где $F^{\mu\nu}(x)$ – тензор напряженности электромагнитного поля. Этот тензор следующим образом выражается через вторично квантованные операторы 4–потенциала электромагнитного поля (см. параграф "Квантованное электромагнитное поле"):

$$F^{\mu\nu}(x) \,=\, \partial^\mu A^\nu(x) \,-\, \partial^\nu A^\mu(x).$$

Если ввести так называемую "длинную производную" $D^\mu(x) = \partial^\mu + ieA^\mu(x)$ (где принято обозначение: $e = -|e|$), то $F^{\mu\nu}(x)$ запишется в следующем виде:

$$F^{\mu\nu}(x) = -\frac{i}{e}\left[D^\mu(x),\, D^\nu(x)\right].$$

Лагранжиан свободного дираковского поля выражается через вторично квантованные операторы фермионного поля $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ (см. параграф "Квантованное дираковское поле"):

$$\mathcal{L}^0(x) = \bar{\psi}(x)\left(i\hat{\partial} - Im\right)\psi(x).$$

Под I понимается единичная матрица размерности 4×4, а под m – масса электрона или позитрона. Для сокращения записи введено *новое обозначение*

$$\hat{A} = \gamma^\mu A_\mu.$$

Необходимо подчеркнуть, что новое обозначение $\hat{A}$ *не имеет ничего общего* с аналогичным по виду обозначением операторов в нерелятивистской квантовой механике!

Наконец ланганжиан взаимодействия электромагнитного и дираковского полей

$$\mathcal{L}^{int}(x) = -e\, j^\mu(x)\, A_\mu(x) = -e\, \left(\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\psi(x)\right)_N\, A_\mu(x),$$

где $e = -|e|$ и $j^\mu(x) = \left(\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\psi(x)\right)_N$ – оператор 4–вектора электромагнитного тока фермионов, N – значек нормального произведения операторов.

Лагранжиан $\mathcal{L}^{QED}(x)$ инвариантен относительно глобальных (α – действительное число)

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{i\alpha}\,\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\, e^{-i\alpha} \end{cases}$$

и локальных ($\alpha(x)$ – действительная функция)

$$\begin{cases} A^\mu(x) \to A^\mu(x) - \frac{1}{e}\,\partial^\mu\alpha(x) \\ \psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\,\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\, e^{-i\alpha(x)} \end{cases}$$

калибровочных преобразований. Инвариантность $\mathcal{L}^{QED}(x)$ относительно глобальных калибровочных преобразований ведет к законам сохранения 4–вектора электромагнитного тока фермионов (т.е. $\partial_\mu\, j^\mu(x) = 0$) и заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\, Q(t) = 0, \qquad Q(t) = \int_{V_3} d\vec{x}\, j^0(x) = \int_{V_3} d\vec{x}\, j^0(t,\, \vec{x}),$$

где V_3 – нормировочный объем в трехмерном пространстве.

Инвариантность относительно локальных калибровочных преобразований фиксирует *минимально возможный вид* лагранжиана взаимодействия. Реальный вид $\mathcal{L}^{int}(x)$ можно найти только сравнивая предсказания теории с экспериментом. Для КЭД, КХД и электрослабой модели Глэшоу–Вайнберга–Салама минимально возможный вид лагранжиана взаимодействия совпадает с тем, который реализуется в Природе.

Полный гамильтониан КЭД является 00–компонентой тензора энергии–импульса КЭД. Для вычислений в релятивистски–инвариантной теории возмущений необходимо знание только гамильтониана взаимодействия КЭД (обозначается как $\mathcal{H}^{int}(x)$), для которого прямыми вычислениями можно получить, что

$$\mathcal{H}^{int}(x) \,=\, -\,\mathcal{L}^{int}(x) \,=\, e\,\left(\bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\psi(x)\right)_N\,A_{\mu}(x), \qquad e \,=\, -\,|e|.$$

Эксперименты показывают, что в Природе помимо электронов (и их античастиц – позитронов) существуют еще два сорта заряженных лептонов (мюоны и τ–лептоны) и шесть сортов кварков (u, c, t и d, s, b). Для учета взаимодействия фотонов со всеми заряженными фермионами два последних слагаемых в полном лагранжиане КЭД требует модификации. Лагранжиан свободных дираковских полей принимает вид

$$\mathcal{L}^{0}(x) \,=\, \sum_i \bar{\psi}_i(x)\,\left(i\hat{\partial} \,-\, I m_i\right)\,\psi_i(x),$$

а лагранжиан взаимодействия записывается как

$$\mathcal{L}^{int}(x) \,=\, -\,|e|\,\sum_i Q_i\,\left(\bar{\psi}_i(x)\,\gamma^{\mu}\psi_i(x)\right)_N\,A_{\mu}(x),$$

где суммирование по i означает суммирование по всем сортам фермионов, Q_i – электрический заряд каждого фермиона в единицах $|e|$. Для электронов, мюонов и τ–лептонов $Q_e \,=\, Q_{\mu} \,=\, Q_{\tau} \,=\, -\,1$. Для "верхних" кварков $Q_u \,=\, Q_c \,=\, Q_t \,=\, +\,2/3$. Для "нижних" кварков $Q_d \,=\, Q_s \,=\, Q_b \,=\, -\,1/3$. При вычислениях процессов КЭД с кварками следует помнить, что каждый сорт кварков имеет три цвета.

Матрица рассеяния, ширины распадов, сечения

Правила Фейнмана в квантовой электродинамике

Чтобы написать выражение для $i\,M_{fi}$ в любом порядке теории возмущений, необходимо нарисовать **все топологически различные** диаграммы Фейнмана, отвечающие рассматриваемому процессу в данном порядке теории возмущений, а затем, руководствуясь ниже перечисленными правилами, по диаграммам написать матричный элемент.

Совокупность правил, сопоставляющих каждой диаграмме Фейнмана слагаемое в матричном элементе, называется **правилами Фейнмана**. Приведем сводку правил Фейнмана для спинорной квантовой электродинамики (КЭД).