Н.В. Никитин

Диаграммы Фейнмана

Электромагнитное поле (две лекции)

Лекция 3

- Решение уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля в калибровке Лоренца.
- Энергия и импульс классического электромагнитного поля.
- Задача о гармоническом осцилляторе в пространстве Фока.
- Квантование электромагнитного поля как набора гармонических осцилляторов.
- Операторы рождения и уничтожения. Коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения.
- 4-потенциал, энергия и импульс квантованного электромагнитного поля.
- Калибровка Лоренца для квантованного электромагнитного поля. Решение проблемы скалярных и продольных фотонов.

Лекция 4

- Калибровочные преобразования и вектора поляризации.
- Суммирование по поляризациям. Матрица плотности фотонов.
- Коммутационные соотношения для операторов электромагнитного поля. Перестановочная функция электромагнитного поля.
- Вакуумные средние и функции .
- Определения нормального и хронологического произведений. Свертка операторов электромагнитного поля.
- Связь свертки с вакуумным средним и причинной функцией Грина . Введение термина "пропагатор".
- Правила обхода полюсов в пропагаторе виртуального фотона.

8. Решение для свободного электромагнитного поля.

В лекции №2 получено:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x).$$

тензор напряжённости эл. маг. поля

4-вектор электромагнитного тока

Свободное поле $\Leftrightarrow j^\nu(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = 0.$$

Будем работать в калибровке Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0,$$

тогда ур-нения для свободного эл. маг. поля сводятся к:

$$0 = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) A^\nu(x) = \square A^\nu(x)$$

даламбертиан

<u>Обозн.</u>: 4-импульс поля $K^\mu = (\omega_K, \vec{K})$.

Общее решение ищем в виде:

$$A^\nu(x) = A^{(+)\nu}(x) + A^{(-)\nu}(x)$$

положительно-частотная часть

отрицательно-частотная часть

Положительно-частотная часть: в ряд Фурье

$$A^{(+)\nu}(x) = \sum_\lambda \int \frac{V d^4K}{(2\pi)^4} e^{-i(Kx)} a^\nu(K,\lambda) \underbrace{2\pi\,\delta(K^2)}$$

суммирование по всем поляризациям поля

все возможные импульсы

эл. маг. волна распространяется со скоростью света $K^2 = K^\mu K_\mu = \omega_K^2 - \vec{K}^2 = 0$

Разберёмся с $\delta(k^2)$. Для этого воспользуемся общей формулой:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \partial f(x)/\partial x \,\big|_{x=x_i} \right|},$$

где x_i – корни уравнения $f(x)=0$.

В рассматриваемом случае:

$0 = k^2 = k^{0\,2} - |\vec{k}|^2 = k^{0\,2} - \omega_k^2 = (k^0-\omega_k)(k^0+\omega_k)$ и

$\partial k^2/\partial k^0 = \partial(k^{0\,2}-\omega_k^2)/\partial k^0 = 2k^0$. Тогда:

$$\delta(k^2) = \frac{\delta(k^0-\omega_k)}{\left|2k^0/_{k^0=\omega_k}\right|} + \frac{\delta(k^0+\omega_k)}{\left|2k^0/_{k^0=-\omega_k}\right|} = \frac{1}{2\omega_k}\left(\delta(k^0-\omega_k)+\delta(k^0+\omega_k)\right).$$

Положительно-частотная часть отвечает условию $k^0>0$, поэтому всегда $\delta(k^0+\omega_k)=0$. Тогда:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdots 2\pi\delta(k^2) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{dk^0}{2\omega_k} \cdots \delta(k^0-\omega_k) = \int \frac{1}{2\omega_k}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \cdots \Big|_{\omega_k=|\vec{k}|=k^0}$$

Отрицательно-частотная часть отвечает условию $k^0<0$, поэтому всегда $\delta(k^0-\omega_k)=0$. Тогда:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdots 2\pi\delta(k^2) = \int \frac{1}{2\omega_k}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \cdots \Big|_{k^0=-\omega_k=-|\vec{k}|}.$$

$$= \sum_\lambda \int \frac{d\vec{k}\, V\, a^\nu(\vec{k},\lambda)}{(2\pi)^3\, 2\omega_k}\, e^{-i(kx)} \stackrel{def}{\equiv} \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{c^\nu(\vec{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}}\, e^{-i(kx)},$$

где $V = L^3$ – объём, в котором рассматривается поле.

Для $A^{(+)\nu}(x)$ ур-ние эл. маг. поля выполняется автоматически:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^{(+)\nu}(x) = \sum_\lambda \int \frac{d\vec{k}\, V\, c^\nu(\vec{k},\lambda)}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k V}}\, \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu e^{-i(kx)}}_{= e^{-i(kx)} (-i)^2 \overbrace{k^\mu k_\mu}^{=0}} = 0$$

Условие Лоренца:

$$\partial_\mu A^{(+)\mu}(x) = -i \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{-i(kx)}}{\sqrt{2\omega_k V}}\, k_\mu c^\mu(\vec{k},\lambda) = 0.$$

Отрицательно-частотная часть:

$$A^{(-)\nu}(x) \stackrel{def}{\equiv} \sum_\lambda \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{c^{+\nu}(\vec{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}}\, e^{i(kx)}, \quad \omega_k > 0.$$

Автоматически:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^{(-)\nu}(x) = 0,$$

а условие Лоренца даёт:

$$i \sum_\lambda k_\mu c^{+\mu}(\vec{k},\lambda) = 0.$$

Полное решение:

$$A^\nu(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, A^\nu(k)\, e^{-i(kx)} + \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, A^\nu(-k)\, e^{i(kx)}$$

положительно-частотная часть — отрицательно-частотная часть

Поле $A^\nu(x)$ – вещественное $\Rightarrow$ $A^{\nu +}(-k) = A^\nu(k)$, что автоматически выполняется при нашем определении коэффициентов $c^\nu(\vec{k},\lambda)$.

4-вектор, зависящий от поляризации поля λ и 3-импульса поля $\vec{k}$.

Разложим $c^{\nu}(\vec{k},\lambda)$ и $c^{+\nu}(\vec{k},\lambda)$ по вещественному базису в пространстве Минковского:

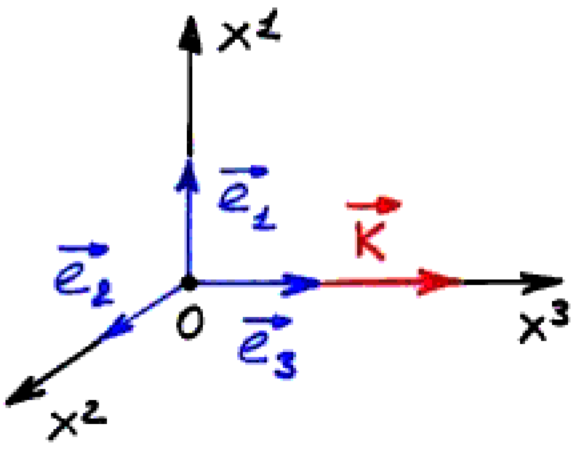
$$c^{\nu}(\vec{k},\lambda) = c_{\vec{k}\lambda}\, e^{\nu}(\vec{k},\lambda)$$
$$c^{+\nu}(\vec{k},\lambda) = c^{+}_{\vec{k}\lambda}\, e^{\nu}(\vec{k},\lambda)$$

Этот базис удовлетворяет очевидному условию:

$$e^{\nu}(\vec{k},\lambda)\, e_{\nu}(\vec{k},\lambda') = g^{\lambda\lambda'},$$

являющемуся обобщением соответствующего условия в 3-х мерном евклидовом пространстве.

Выберем систему координат, где $Ox^3 \parallel \vec{k}$, тогда:



Орты в 3-х мерии (x^1, x^2, x^3):

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$;

$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Очевидный выбор:

$$\left.\begin{aligned} e^{\nu}(\vec{k},\lambda=1) &= (0, \vec{e}_1) \\ e^{\nu}(\vec{k},\lambda=2) &= (0, \vec{e}_2) \end{aligned}\right\} \text{ поперечная поляризация}$$

$e^{\nu}(\vec{k},\lambda=3) = (0, \vec{e}_3)$ – продольная поляризация

Условия нормировки и ортогональности диктуют однозначный выбор скалярной поляризации:

$$e^{\nu}(\vec{k},\lambda=0) = (1, 0, 0, 0)$$

Таким образом: $e^{\nu}(\vec{k},\lambda) = \delta^{\nu\lambda}$.

Таким образом:

$$A^{\nu}(x) = \sum_{\lambda}\int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \frac{e^{\nu}(\vec{k},\lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(c_{\vec{k}\lambda} e^{-i(kx)} + c^{+}_{\vec{k}\lambda} e^{i(kx)}\right).$$

Эквивалентно:

$$\sum_{\lambda}\int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \text{ и } \sum_{\lambda}\sum_{\vec{k}} \text{ и } \sum_{\lambda\vec{k}}.$$

Условие Лоренца накладывает связь на коэффициенты $c_{\vec{k}0}$ и $c_{\vec{k}3}$ или $c^+_{\vec{k}0}$ и $c^+_{\vec{k}3}$.

На прозрачке №18:

$$\sum_\lambda k_\mu c^\mu(\vec{k},\lambda) = \sum_\lambda k_\mu e^\mu(\vec{k},\lambda) c_{\vec{k}\lambda} = \omega_k c_{\vec{k}0} - |\vec{k}| c_{\vec{k}3} = \\ = \omega_k (c_{\vec{k}0} - c_{\vec{k}3}) = 0.$$

Аналогично:

$$\sum_\lambda k_\mu c^{+\mu}(\vec{k},\lambda) = \omega_k (c^+_{\vec{k}0} - c^+_{\vec{k}3}) = 0.$$

Эти условия компенсирует ~~ют~~ вклад (нефизических) продольной и скалярной поляризаций фотонов во все наблюдаемые величины.

9. Энергия и импульс классического электромагнитного поля.

Везде далее будем полагать $V=1$, т.к. с точки зрения физики от нормировочного объёма ничего не должно зависеть.

A) Энергия эл. маг. поля.

$$E = \int d\vec{x}\, T^0_0$$

нулевая компонента тензора энергии-импульса.

В лекции №2 вычислен T^μ_ν:

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \delta^0_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu - \mathcal{L},$$

где лагранжиан свободного эл. маг. поля есть:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} A_\nu \partial^\nu \underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{0 \text{ по усл. Лоренца}} + \\ + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu)}_{}$$

полная 4-дивергенция не даёт вклад в ур-ния Лагранжа.

Тогда

$$E=\int d\vec{x}\left(-\partial^0 A^\nu \partial_0 A_\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu\right)=$$

$$=-\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=0}^{3}g^{\lambda\lambda}\,\frac{c_\lambda^+ c_\lambda+c_\lambda c_\lambda^+}{2}\cdot\omega_k$$

Учитывая условие Лоренца на c_λ и c_λ^+, получаем:

$$E=\sum_{\lambda=1}^{2}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{\omega_k}{2}\left(c^+_{\vec{k}\lambda}c_{\vec{k}\lambda}+c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda}\right)$$

Б) Импульс эл. маг. поля.

Полностью аналогично получаем:

$$\vec{P}=\sum_{\lambda=1}^{2}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{\vec{k}}{2}\left(c^+_{\vec{k}\lambda}c_{\vec{k}\lambda}+c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda}\right).$$

В классической теории $c^+_{\vec{k}\lambda}c_{\vec{k}\lambda}=c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda}$. В квантовой – всё иначе.

10. Квантование эл. маг. поля

А) Основная идея:

Классическое поле

$\downarrow$

Набор независимых колебаний (осцилляторов с частотами ω_k (см. выше)

$\downarrow$

Набор квантовых осцилляторов

$\downarrow$

Квантовое поле

Вопрос: в чём будет отличие квантового поля от классического?

Ответ: $c_{\vec{k}\lambda}$ и $c^+_{\vec{k}\lambda}$ станут операторами уничтожения и рождения: $[c_{\lambda\vec{k}}, c^+_{\lambda'\vec{k}'}]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

Покажем, как получается выражение для энергии электромагнитного поля через $c_{\vec{k}\lambda}$ и $c^+_{\vec{k}\lambda}$.

$$E=\int d\vec{x}\left(-\partial^0 A^\nu \partial_0 A_\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu\right)$$

$$\partial^\mu A^\nu(x)=-i\sum_\lambda\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^\nu(\vec{k},\lambda)k^\mu}{\sqrt{2\omega_k}}\left(c_{\vec{k}\lambda}e^{-i(kx)}-c^+_{\vec{k}\lambda}e^{i(kx)}\right)$$

Первое слагаемое:

$$-\int d\vec{x}\,\partial^0 A^\nu \partial_0 A_\nu=E^{++}_{00}+E^{+-}_{00}+E^{-+}_{00}+E^{--}_{00}$$

$$E^{--}_{00}=-(-i)^2\int\frac{d\vec{x}\,d\vec{k}\,d\vec{k}'}{(2\pi)^6 2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\omega_k\omega_{k'}\sum_\lambda\sum_{\lambda'}e^\nu(\vec{k},\lambda)e_\nu(\vec{k}',\lambda')c_{\vec{k}\lambda}c_{\vec{k}'\lambda'}e^{-ix(k+k')}$$

Рассмотрим:

$$\int d\vec{k}'\frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3}e^{-ix(k+k')}=\int d\vec{k}'e^{-it(\omega_k+\omega_{k'})}\int\frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{x}(\vec{k}+\vec{k}')}=$$

$$=\int d\vec{k}'e^{-it(\omega_k+\omega_{k'})}\delta(\vec{k}+\vec{k}')=e^{-2it\omega_k}$$

Далее при интегрировании по $d\vec{k}=|\vec{k}|^2d|\vec{k}|d\Omega=\omega_k^2 d\omega_k d\Omega$ экспонента даёт $\delta(\omega_k)$, что ведёт к зануления всего интеграла. $\therefore$ $E^{--}_{00}=0$. Аналогично $E^{++}_{00}\sim c^+_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}'\lambda'}=0$.

Далее:

$$E^{-+}_{00}=-(-i)^2\int\frac{d\vec{x}\,d\vec{k}\,d\vec{k}'}{(2\pi)^6 2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\omega_k\omega_{k'}\sum_\lambda\sum_{\lambda'}e^\nu(\vec{k},\lambda)e_\nu(\vec{k}',\lambda')(-1)c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}'\lambda'}e^{-ix(k-k')}=$$

$$=-\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k^2}{2\omega_k}\sum_\lambda\sum_{\lambda'}e^\nu(\vec{k},\lambda)e_\nu(\vec{k},\lambda')e^{-it(\omega_k-\omega_k)}c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda'}=$$

$$=-\sum_{\lambda=0}^{3}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k}{2}g^{\lambda\lambda}c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda}=\left\{\begin{matrix}\text{в калибровке Лоренца}\\ c_{\vec{k}0}c^+_{\vec{k}0}-c_{\vec{k}3}c^+_{\vec{k}3}=0\end{matrix}\right\}=$$

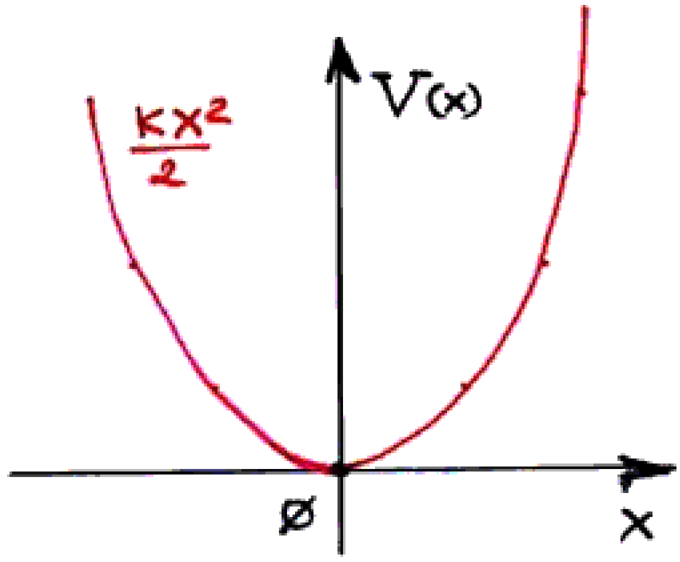
$$=\sum_{\lambda=1}^{2}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k}{2}c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda}.$$

Аналогично $E^{+-}_{00}=\sum_{\lambda=1}^{2}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k}{2}c^+_{\vec{k}\lambda}c_{\vec{k}\lambda}$, что даёт искомый результат для энергии поля E.

Слагаемое же $\sim\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu\sim k_\mu k^\mu=k^2=0$ и не даёт никакого вклада в E.

Вычисления для $\vec{P}$ полностью аналогичны вычислениям для E. Студентам предлагается проделать их самостоятельно.

Б) Квантование осциллятора. Операторы рождения и уничтожения.



В дополнение к $\hbar = c = 1$ положим $m = 1$.

Потенциальная энергия:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{\omega^2 x^2}{2}.$$

Гамильтониан:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}$$

От $\hat{p}$ и $\hat{x} \equiv x$ перейдём к безразмерным $\hat{P}$ и $\hat{Q}$.

Пусть:

$$\hat{x} = x_0 \hat{Q}$$

константа размерности $[x]$.

Введём $\hat{Q} = Q$ и $\hat{P} = -i\, d/dQ$, так что $\hat{p} = p_0 \hat{P}$,

тогда

$$\hat{H} = \frac{p_\varnothing^2}{2x_\varnothing^2}\frac{d^2}{dQ^2} + \frac{\omega^2 x_\varnothing^2}{2} Q^2.$$

Если положить $x_\varnothing = 1/\sqrt{\omega}$ и $p_\varnothing = \sqrt{\omega}$, то гамильтониан осциллятора запишется в очень простом виде:

$$\hat{H} = \omega\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dQ^2} + \frac{Q^2}{2}\right]$$

или в терминах операторов $\hat{Q}$ и $\hat{P}$:

$$\hat{H} = \omega\left[\frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\hat{Q}^2}{2}\right]. \qquad (1)$$

Соотношение коммутации:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \Rightarrow [\hat{Q}, \hat{P}] = i$$

Необходимо решить стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом (1).

Диагонализуем $\hat{H}$. Для этого введём новые операторы:

$$\hat{c} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \hat{c}^+ = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}}.$$

Соотношение коммутации:

$$[\hat{c}, \hat{c}^+] = 1.$$

Введём оператор $\hat{N}$:

$$\hat{N} = \hat{c}^+\hat{c},$$

который в терминах $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ можно записать:

$$\hat{N} = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{Q}^2 + \hat{P}^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

$\hat{N}$ – эрмитов оператор ($\hat{N} = \hat{N}^+$) и надо понять, соответствует ли он какой-либо физической наблюдаемой.

<u>Свойство</u>: $\hat{N}$: оператор $\hat{N}$ НЕ отрицательный, т.е.:

$$\langle \hat{N} \rangle_\psi \geq \emptyset.$$

Гамильтониан $\hat{H}$ выражается через $\hat{N}$ <u>линейно</u>:

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, поиск собственных векторов и собственных значений $\hat{H} \Leftrightarrow$ поиску собственных векторов и собственных значений $\hat{N}$.

Поиск собственных векторов и собственных значений оператора $\hat{N}$ позволит выяснить, какой физической наблюдаемой он соответствует и прояснит смысл операторов $\hat{c}$ и $\hat{c}^+$, которые окажутся ключём к квантованию электромагнитного поля.

Проведём более подробно вычисления с прозрачки № 23.

1. Вычислим коммутатор $[\hat{c}, \hat{c}^+]$. По определению операторов $\hat{c}$ и $\hat{c}^+$ можем записать:

$$[\hat{c}, \hat{c}^+] = \hat{c}\,\hat{c}^+ - \hat{c}^+\hat{c} = \frac{1}{2}\left[(\hat{Q}+i\hat{P})(\hat{Q}-i\hat{P}) - (\hat{Q}-i\hat{P})(\hat{Q}+i\hat{P})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{Q}^2 - i\hat{Q}\hat{P} + i\hat{P}\hat{Q} + \hat{P}^2 - \hat{Q}^2 - i\hat{Q}\hat{P} + i\hat{P}\hat{Q} - \hat{P}^2\right] =$$

$$= -i[\hat{Q}, \hat{P}] = -i \cdot i = 1 \Rightarrow [\hat{c}, \hat{c}^+] = 1.$$

2. Выразим оператор $\hat{N}$ через $\hat{Q}$ и $\hat{P}$. По определению:

$$\hat{N} = \hat{c}^+\hat{c} = \frac{\hat{Q}-i\hat{P}}{\sqrt{2}}\,\frac{\hat{Q}+i\hat{P}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{Q}^2+\hat{P}^2}{2} + \frac{i}{2}[\hat{Q}, \hat{P}] = \frac{\hat{Q}^2+\hat{P}^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

3. Покажем, что оператор $\hat{N}$ - эрмитовский. Для этого используем свойство эрмитовского сопряжения для произведения операторов:

$$(\hat{A}\hat{B}\ldots\hat{C})^+ = \hat{C}^+\ldots\hat{B}^+\hat{A}^+.$$

Тогда:

$$\hat{N}^+ = (\hat{c}^+\hat{c})^+ = \hat{c}^+(\hat{c}^+)^+ = \hat{c}^+\hat{c} = \hat{N},$$ что и требовалось доказать.

4. Покажем, что $\langle\hat{N}\rangle_\psi \geq 0$. Для этого воспользуемся единичным оператором:

$$\hat{1} = \sum_a |a\rangle\langle a|,$$

где $|a\rangle$ - базис в абстрактном гильбертовом пространстве. Тогда:

$$\langle\hat{N}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{c}^+\hat{c}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{c}^+\hat{1}\hat{c}|\psi\rangle =$$

$$= \sum_a \langle\psi|\hat{c}^+|a\rangle\langle a|\hat{c}|\psi\rangle = \sum_a c^+_{\psi a} c_{a\psi} =$$

$$= \left\{ c^+_{\psi a} = (c^*_{\psi a})^T = c^*_{a\psi} \right\} = \sum_a c^*_{a\psi} c_{a\psi} =$$

$$= \sum_a |c_{a\psi}|^2 \geq 0,$$ что и требовалось доказать.

Рассмотрим осциллятор в абстрактном гильбертовом пространстве. Пусть $|n\rangle$ и n – собственные вектора и собственные значения оператора $\hat{N}$, то есть:

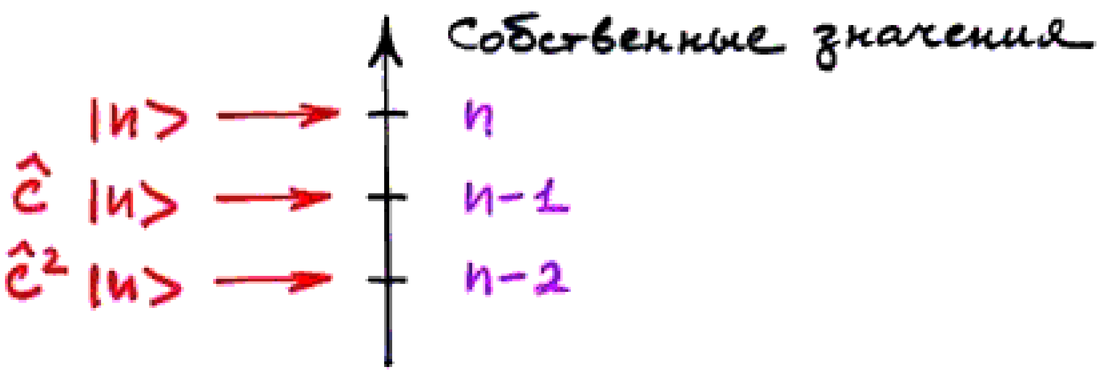
$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Тогда легко показать, что:

$$\hat{N}(\hat{c}|n\rangle) = (n-1)(\hat{c}|n\rangle).$$

Таким образом $(\hat{c}|n\rangle)$ – собственный вектор оператора $\hat{N}$, отвечающий собственному значению $(n-1)$:

$$\hat{c}|n\rangle \sim |n-1\rangle$$



Абсолютно аналогично:

$$\hat{N}(\hat{c}^{+}|n\rangle) = (n+1)(\hat{c}^{+}|n\rangle),$$

то есть $(\hat{c}^{+}|n\rangle)$ является собственным вектором оператора $\hat{N}$, отвечающим собственному значению $(n+1)$:

$$\hat{c}^{+}|n\rangle \sim |n+1\rangle$$

Покажем, как получается равенство:

$$\hat{N}(\hat{c}|n\rangle) = (n-1)(\hat{c}|n\rangle).$$

При вычислениях нужно воспользоваться коммутатором $[\hat{c},\hat{c}^+] = \hat{c}\hat{c}^+ - \hat{c}^+\hat{c} = 1$ и определением $\hat{N} = \hat{c}^+\hat{c}$. Тогда:

$$\hat{N}(\hat{c}|n\rangle) = \hat{N}\hat{c}|n\rangle = \hat{c}^+\hat{c}\,\hat{c}|n\rangle = (\hat{c}\hat{c}^+ - 1)\hat{c}|n\rangle =$$

$$= \hat{c}(\hat{c}^+\hat{c} - 1)|n\rangle = \hat{c}(\hat{N} - 1)|n\rangle = \hat{c}(n-1)|n\rangle = (n-1)(\hat{c}|n\rangle).$$

Равенство

$$\hat{N}(\hat{c}^+|n\rangle) = (n+1)(\hat{c}^+|n\rangle)$$

получается полностью аналогично. Студентам предлагается проверить его самостоятельно.

Пусть $\exists$ минимальное собственное значение оператора $\hat{N}$ n_{min} и пусть этому собственному значению соответствует собственный вектор $|n_{min}\rangle$. Тогда:

$$\hat{c}\,|n_{min}\rangle = 0.$$

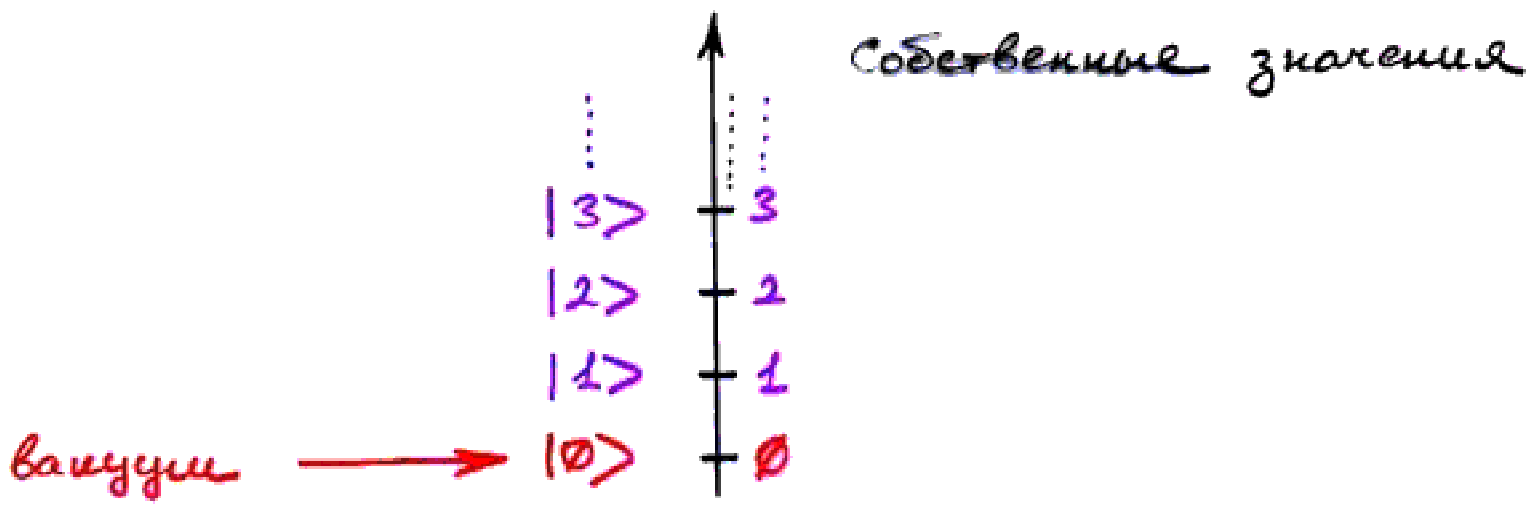
Поскольку

$$0 = \hat{c}^{+}\cdot 0 = \hat{c}^{+}c\,|n_{min}\rangle = \hat{N}\,|n_{min}\rangle = n_{min}\,|n_{min}\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n_{min} = 0$$

Набор собственных значений оператора $\hat{N}$:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ldots$$



Уровни энергии гамильтониана $\hat{H}$:

$$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$\hat{N}$ – имеет смысл оператора числа квантов (фотонов) с энергией ω – оператор числа частиц;

$\hat{c}^{+}$ – увеличивает число квантов энергии ω на 1 – – оператор рождения частицы (фотона) с энергией ω;

$\hat{c}$ – уменьшает число квантов энергии ω на 1 – – оператор уничтожения частицы (фотона) с энергией ω.

Вычислим коэффициенты при $\hat{c}^+|n\rangle \sim |n+1\rangle$ и
$\hat{c}|n\rangle \sim |n-1\rangle$.

Имеем:

$$\hat{c}^+|n\rangle = A\,|n+1\rangle,$$

где $A = \text{const}$. Её можно определить с точностью до фазового множителя.

Поскольку $\langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle = 1$,

то:

$$n+1 = (n+1)\langle n|n\rangle = \langle n|\hat{N}+1|n\rangle = \langle n|\hat{c}^+\hat{c}+1|n\rangle =$$

$$= \langle n|\hat{c}\,\hat{c}^+|n\rangle = \langle n|(\hat{c}^+)^+\hat{c}^+|n\rangle = \langle n+1|A^*A|n+1\rangle = |A|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{n+1}\cdot e^{i\gamma_A}.$$

Положим фазовый множитель $\gamma_A = 0$, тогда:

$$\hat{c}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle.$$

Обобщим:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{c}^+)^n|0\rangle$$

описывает процесс рождения n квантов (фотонов) частоты ω из вакуума.

Аналогично:

$$\hat{c}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle.$$

Если есть n_1 квантов частоты ω_1 и n_2 квантов частоты ω_2, то в этом случае:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \frac{\hat{p}_2^2}{2} + \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$$

и вектор состояния определяется как:

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}}\frac{1}{\sqrt{n_2!}}\left(\hat{c}^+_{\omega_1}\right)^{n_1}\left(\hat{c}^+_{\omega_2}\right)^{n_2}|0_{\omega_1}, 0_{\omega_2}\rangle.$$

В) Квантование эл. маг. поля.

Итак, в КМ энергия одного колебания:

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{c}^+\hat{c} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\omega}{2}\left(\hat{c}^+\hat{c} + \hat{c}\hat{c}^+\right)$$

и коммутатор операторов рождения и уничтожения:

$$[\hat{c}, \hat{c}^+] = 1.$$

В квантовой теории

I) каждая мода характеризуется λ и $\vec{k} \Rightarrow \omega_k$, так что:

$$\hat{c} \to c_{\vec{k}\lambda} \text{ и } \hat{c}^+ \to c^+_{\vec{k}\lambda},$$

уничтожает фотон с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ

рождает фотон с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ

$$\hat{H} \to \hat{H}_{\vec{k},\lambda} \Rightarrow E = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}} H_{\vec{k},\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k}{2}\left(c^+_{\vec{k}\lambda}c_{\vec{k}\lambda} + c_{\vec{k}\lambda}c^+_{\vec{k}\lambda}\right)$$

оператор, действующий на векторах

$$|\gamma\rangle \equiv |n_1\gamma(\vec{k}_1,\lambda_1), n_2\gamma(\vec{k}_2,\lambda_2), \dots\rangle$$

Аналогично 4-потенциал тоже стал оператором:

$$A^\mu(x) = \sum_\lambda \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[e^\mu(\vec{k},\lambda)\, c_{\vec{k}\lambda}\, e^{-i(kx)} + e^{*\mu}(\vec{k},\lambda)\, c^+_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(kx)}\right].$$

II) Различные моды колебаний (фотоны разной частоты) независимы, т.е.:

$$[\hat{c}, \hat{c}^+] = 1 \Rightarrow [c_{\vec{k}\lambda}, c^+_{\vec{k}'\lambda'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},$$

$$[c_{\vec{k}\lambda}, c_{\vec{k}'\lambda'}] = [c^+_{\vec{k}\lambda}, c^+_{\vec{k}'\lambda'}] = \varnothing.$$

III) Вследствии независимости операторов рождения и уничтожения для различных поляризаций не работает условие Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = ? \Rightarrow \begin{cases} c_{\vec{k}\varnothing} - c_{\vec{k}3} = ? \\ c^+_{\vec{k}\varnothing} - c^+_{\vec{k}3} = ? \end{cases}$$

Если нельзя наложить условия на операторы, то надо наложить условия на состояния $|\gamma\rangle$! То есть:

$$\begin{cases} (c_{\vec{k}_0} - c_{\vec{k}_3})|\gamma\rangle = 0 \\ \langle\gamma|(c^+_{\vec{k}_0} - c^+_{\vec{k}_3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle\gamma|\partial_\mu A^\mu|\gamma\rangle = 0,$$

т.е. если нельзя наложить условие на саму 4-дивергенцию, то надо наложить условие на её среднее (в духе квантовой теории!) и рассматривать только такие состояния квантовой системы, которые этим условиям удовлетворяют.