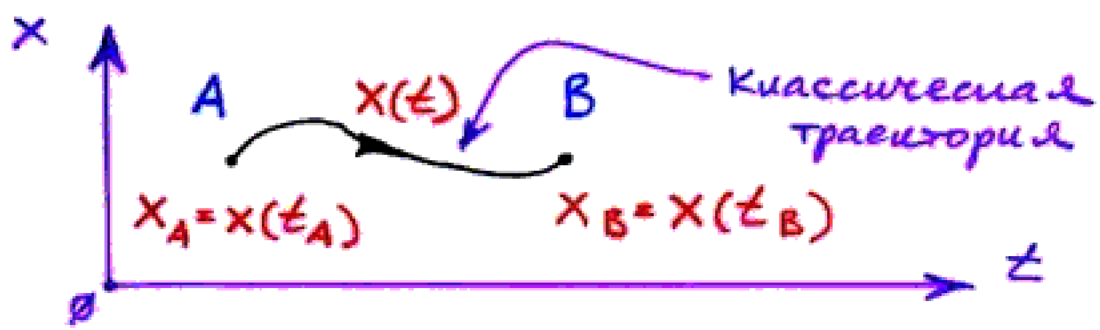
Н.В. Никитин

Диаграммы Фейнмана

Основы лагранжева формализма в КТП

- Принцип наименьшего действия. Лагранжиан и плотность лагранжиана.
- Уравнение Лагранжа.
- Гамильтониан, импульс, момент количества движения.
- Пример лагранжева подхода для уравнения Максвелла.
- Тензор напряженности электромагнитного поля.

4. Принцип наименьшего действия и ур-ния Лагранжа в классической механике



$$S = S(t_A, t_B, x_A, x_B) = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(t, x, \dot{x})$$

действие

ф-ция Лагранжа классич. системы

$L(t, x, \dot{x}) = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$ – разность кинетической и потенциальной энергий классической системы.

Принцип наименьшего действия Гамильтона:

траектория движения частицы из A в B определяется условиями:

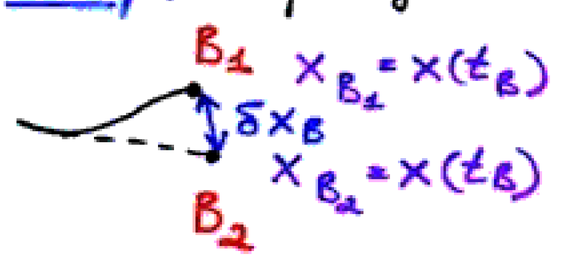
$$\delta S = 0 \quad \text{при} \quad \delta x_A = \delta x_B = 0$$

условие минимума действия

условие того, что точки A и B – фиксированы

Обозн: δf называют *вариацией* величины f.

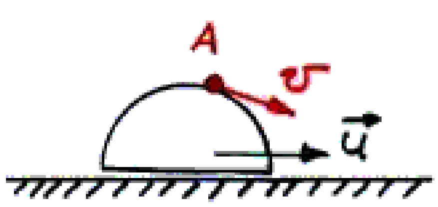
Пример: вариация координаты:



, тогда $\delta x_B \overset{def}{\equiv} x_{B_1} - x_{B_2}$

Замечание: В общем случае $\delta x \neq dx$!

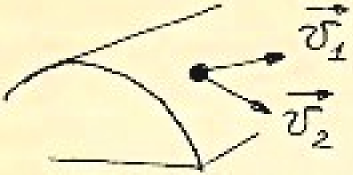
вариация, дифференциал



Шарик A скатывается по поверхности полуцилиндра, движущегося со скоростью $\vec{u}$

$$d\vec{r} = (\vec{u} + \vec{v})dt, \quad \delta\vec{r} = d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)dt$$

всегда лежит в плоскости, касательной к поверхности цилиндра.



$\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - всегда лежат в плоскости, касательной к поверхности цилиндра, но $\vec{v}_1+\vec{u}$ и $\vec{v}_2+\vec{u}$ - нет, если $\vec{u} \neq 0$

Таким образом $d\vec{r} \neq \delta \vec{r}$ если $\vec{u} \neq 0$ и

$$d\vec{r} = \delta \vec{r} \text{ если } \vec{u} = 0.$$

Этот весьма красивый пример красноречиво демонстрирует, что понятия полного дифференциала и вариации не являются тождественными.

* * *

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Покажем, что δ и $\frac{d}{dt}$ - коммутируют, т.е. что

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x.$$

Действительно:

$$\delta \dot{x} \equiv \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \frac{d}{dt} x_1 - \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = \frac{d}{dt} \delta x.$$

Доказательство проведено только исходя из определения вариации величины f как $\delta f = f_1 - f_2$.

Из условия $\delta S = 0$ следуют ур-ния Лагранжа, которые полностью определяют движение классической системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

При выводе считается, что x и $\dot{x}$ – независимые переменные!!!

Вывод: уравнений Лагранжа: $\Delta t = t_B - t_A$ и

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right) = \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\delta x \text{, тогда}$$

$$0 = \delta S \equiv S(x+\delta x, \Delta t) - S(x, \Delta t) =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} dt \left(L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) - L(t, x, \dot{x}) \right) =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{=0\text{, т.к. } \delta x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \underbrace{\delta x}_{=0} \Big|_A^B$$

$= 0$ – по условию в т.ч.н. A и B

$= 0$, т.к. δx вне точек A и B – произвольна и, вообще говоря, $\neq 0$.

Пример: вычисления классического действия S_{cl} для свободной частицы (одномерный случай).

Лагранжиан: $L(t, x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2$

Ур-ния Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow$ (ур-ние Лагранжа)

$\Rightarrow \dot{x} = \text{const} = v \Rightarrow x(t) = x_0 + vt.$

Условия: $x(t_A) = x_A$, $x(t_B) = x_B \Rightarrow v = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{cl} = \int_{t_A}^{t_B} L(t, x, \dot{x})\,dt = \frac{mv^2}{2}(t_B - t_A) = \frac{m}{2}\frac{(x_B - x_A)^2}{t_B - t_A}.$$

В этом простейшем примере видно, что

$$S = S(t_A, t_B, x_A, x_B) = S(\Delta t, x_B - x_A).$$

Для вывода уравнений Лагранжа нужно:

$$L(t, x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}) \approx L(t,x,\dot{x}) + \delta x \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial x} +$$

$$+ \delta\dot{x} \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} = L(t,x,\dot{x}) + \delta x \frac{\partial L(\ldots)}{\partial x} + \left(\frac{d}{dt}\delta x\right)\frac{\partial L(\ldots)}{\partial \dot{x}} =$$

$$= L(t,x,\dot{x}) + \delta x \frac{\partial L(\ldots)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\ldots)}{\partial \dot{x}}\delta x\right) - \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\ldots)}{\partial \dot{x}} =$$

$$= L(t,x,\dot{x}) + \delta x \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right).$$

5. Принцип наименьшего действия и ур-ния Лагранжа в теории поля.

а) Требование релятивистской инвариантности:

$$dt \to dt\,dx^1 dx^2 dx^3 = dt\,d\vec{x} = d^4x$$

б) Поля описываются ф-циями поля $\varphi_i(x)$.

набор квантовых чисел, характеризующих поле

Пример: эл.-маг. поле описывается 4-потенциалом

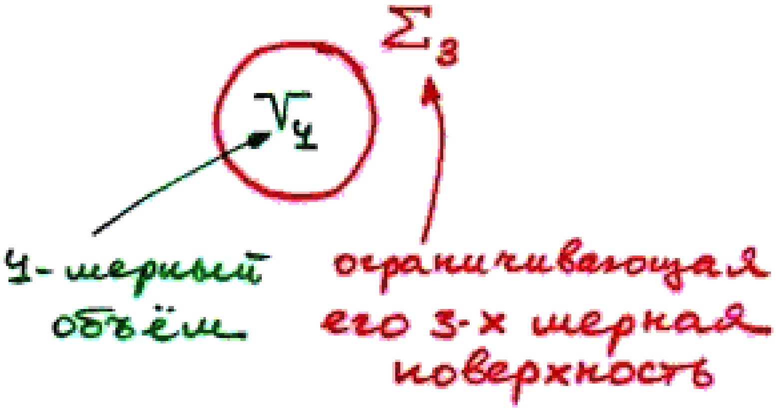
$$A^\mu(x) = (\varphi(x), \vec{A}(x))$$

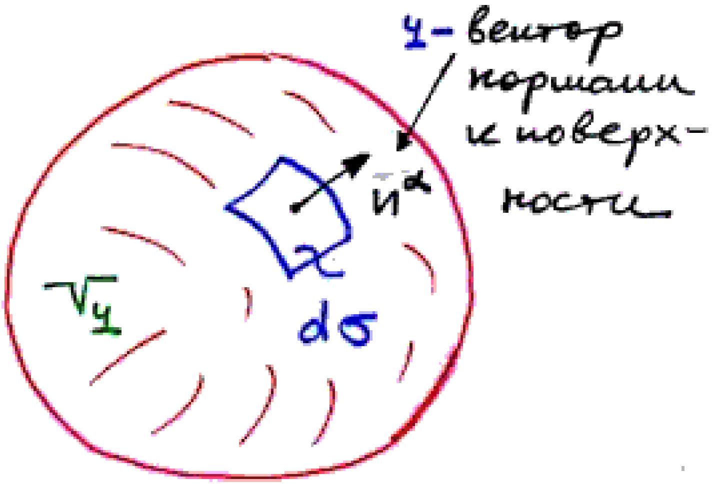
скалярный потенциал

вектор-потенциал

Ф-ции поля $\varphi_i(x)$ играют роль "координат" поля:

$$x \to \varphi_i(x) \qquad \dot{x} \to \partial^\nu \varphi(x)$$





$$d\sigma^\alpha = n^\alpha d\sigma \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

$$S = \int_{V_4} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x))$$

плотность ф-ции Лагранжа или лагранжиан.

Принцип наименьшего действия:

уравнения поля получаются из условия:

$$\delta S = 0 \text{ при условии, что } \delta\varphi_i(x)\big|_{\Sigma_3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} = 0$$

Вывод ур-ний Лагранжа для поля идейно абсолютно аналогичен выводу ур-ний Лагранжа в классической механике. Именно:

$$\delta(\partial^\nu \varphi_i(x)) \overset{def}{=\!=} \partial^\nu \tilde{\varphi}_i(x) - \partial^\nu \varphi_i(x) = \partial^\nu(\tilde{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x)) = \partial^\nu \delta\varphi_i(x),$$

где было для удобства введено обозначение

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x)$$

Тогда:

$$\delta S = \int\limits_{V_4} d^4x \left(\mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\nu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x)) \right) =$$

$$= \int\limits_{V_4} d^4x \left(\cancel{\mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x))} + \delta\varphi_i(x) \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu\varphi_i(x))}{\partial \varphi_i(x)} + \right.$$

$$\left. + \delta(\partial^\nu \varphi_i(x)) \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x))}{\partial(\partial^\nu \varphi_i(x))} - \cancel{\mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\nu \varphi_i(x))} \right)$$

Аналогично классической механике можем написать:

$$\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \delta\varphi_i \right) = \delta\varphi_i \, \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \underbrace{(\partial^\nu \delta\varphi_i)}_{\substack{\shortparallel \\ \text{см. выше} \\ \shortparallel \\ \delta(\partial^\nu \varphi_i)}}$$

Таким образом:

$$\varnothing = \delta S = \int\limits_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \right) + I, \text{ где}$$

$$I = \int\limits_{V_4} d^4x \, \partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \delta\varphi_i \right) \overset{\text{теор. Гаусса-Остроградского}}{=} \int\limits_{\Sigma_3} d\sigma^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi_i)} \overbrace{\delta\varphi_i}^{=\varnothing \text{ по условию}} \Big/_{\Sigma_3} = \varnothing$$

<u>Пример:</u> ур-ние Лагранжа для электромагнитного поля: $\varphi_i(x) \longrightarrow A^\mu(x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(A^\mu(x), \partial^\nu A^\mu(x))}{\partial A^\mu(x)} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}(A^\mu(x), \partial^\nu A^\mu(x))}{\partial(\partial^\nu A^\mu(x))} = \varnothing$$

6. Классическое электромагнитное поле.

Напряжённости электрического и магнитного полей

$$\vec{E}=(E^1,E^2,E^3) \text{ и } \vec{\mathcal{H}}=(\mathcal{H}^1,\mathcal{H}^2,\mathcal{H}^3)$$

можно выразить, используя компоненты 4-потенциала: $A^\mu=(\varphi,\vec{A})\equiv(A^0,A^1,A^2,A^3)$

следующим образом:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}A^0 \quad \text{и}$$

$$\vec{\mathcal{H}}=\mathrm{rot}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2}-\frac{\partial A^2}{\partial x^3};\frac{\partial A^1}{\partial x^3}-\frac{\partial A^3}{\partial x^1};\frac{\partial A^2}{\partial x^1}-\frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right).$$

Величины $\vec{E}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ не изменятся, если сделать замену:

$$A^\mu(x)\to A^\mu(x)+\partial^\mu f(x),$$

где $f(x)$ — произвольная функция, которая определяет конкретный выбор (калибровку) 4-потенциала.

Для релятивистски-инвариантного описания эл.маг. поля удобно ввести тензор напряжённости электро-магнитного поля:

$$F^{\mu\nu}(x)=\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu A^\mu(x) \Rightarrow F^{\mu\nu}(x)=-F^{\nu\mu}(x).$$

Покомпонентно:

$$F^{\mu\nu}(x)=\begin{array}{c|c} \mu/\nu \to & \begin{matrix}\ \ 0 & \ \ 1 & \ \ 2 & \ \ 3\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -\mathcal{H}^3 & \mathcal{H}^2 \\ E^2 & \mathcal{H}^3 & 0 & -\mathcal{H}^1 \\ E^3 & -\mathcal{H}^2 & \mathcal{H}^1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

С нижними индексами:

$$F_{\mu\nu}=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -\mathcal{H}^3 & \mathcal{H}^2 \\ -E^2 & \mathcal{H}^3 & 0 & -\mathcal{H}^1 \\ -E^3 & -\mathcal{H}^2 & \mathcal{H}^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\vec{E}$ не зависит от выбора калибровки.
Действительно:

$$\vec{E} \to -\frac{\partial(\vec{A}-\vec{\nabla}f)}{\partial t} - \vec{\nabla}\left(A^0 + \frac{\partial}{\partial t}f\right) =$$

$$= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}A^0 + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}f(x) - \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}f(x) = \vec{E}$$

Для $\vec{H}$ проверка ещё проще.

* * *

Разберёмся с компонентами тензора напряжённости эл.-маг. поля $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Т.к. данный тензор по определению антисимметричный, то $F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$.

Далее:

$$F^{01} = \partial^0 A^1(x) - \partial^1 A^0(x) = \frac{\partial}{\partial t}A^1(x) + \frac{\partial}{\partial x^1}A^0(x) = -E^1 = -F^{10}.$$

Аналогично: $F^{02} = -F^{20} = -E^2$, $F^{03} = -F^{30} = -E^3$;

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = -H^3 = -F^{21};$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial A^3}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^3} = +H^2 = -F^{31};$$

$$F^{23} = -\frac{\partial A^3}{\partial x^2} + \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = -H^1 = -F^{32}.$$

* * *

Если время позволит, то рассказать про релятивистские инварианты:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ik}F_{ik} = 2\vec{E}^2 - 2\vec{H}^2 = 2(\vec{E}^2 - \vec{H}^2),$$

где $i, k = 1, 2, 3$.

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = 4(\vec{E}\vec{H})$. Откуда „$+4$"? Вот откуда:

$$\varepsilon_{0123}F^{01}F^{23} = +1(-E^1)(-H^1) = E^1H^1;$$

$$\varepsilon_{2301}F^{23}F^{01} = \varepsilon_{0123}F^{01}F^{23} = E^1H^1;$$

$$\varepsilon_{1032}F^{10}F^{32} = \varepsilon_{0123}(-F^{01})(-F^{23}) = \varepsilon_{0123}F^{01}F^{23} = E^1H^1$$

чётная перестановка индексов

$$\varepsilon_{3210}F^{32}F^{10} = \varepsilon_{0123}F^{01}F^{23} = E^1H^1.$$

чётная перестановка индексов

А) Уравнения Максвелла и $F^{\mu\nu}(x)$.

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{\mathcal{H}} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{E} = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \\ &(\vec{\nabla}\vec{\mathcal{H}}) = 0 \end{aligned}\right\} \text{1-ая пара} \\ \left.\begin{aligned} &\vec{j} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} - \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ &(\vec{\nabla}\vec{E}) = \rho \end{aligned}\right\} \text{2-ая пара} \end{cases}$$

Эти уравнения лоренц-инвариантны и допускают простую запись в 4-хмерной форме.

1-ая пара уравнений Максвелла является следствием антисимметрии $F^{\mu\nu}(x)$:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \partial^{\lambda}F^{\mu\nu}(x) + \partial^{\nu}F^{\lambda\mu}(x) + \partial^{\mu}F^{\nu\lambda}(x) = 0$$

2-ая пара уравнений Максвелла является следствием уравнения движения:

$$\boxed{\partial_{\mu}F^{\mu\nu}(x) = j^{\nu}(x)},$$

где $j^{\nu}(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$ явл. 4-вектором эл.маг. тока.

Запишем это ур-нение через $A^{\nu}(x)$. По опр. $F^{\mu\nu}(x)$:

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu} = j^{\nu} \Rightarrow \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu}) = j^{\nu}$$

Воспользовавшись калибровочным произволом $A^{\mu}(x)$, вводим калибровку Лоренца:

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} = j^{\nu} \quad -$$

– четырёхмерная запись 2-ой пары уравнений Максвелла: простота и экономичность мысли!!!

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x)$$

Проверим, что это уравнение даёт вторую пару уравнений Максвелла. Действительно:

а) $\nu = 0$, тогда

$$\rho = j^0 = \partial_\mu F^{\mu 0} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{E} \end{pmatrix} = (\vec{\nabla}\vec{E}) = \operatorname{div}\vec{E}.$$

б) $\nu \equiv i = 1,2,3$, тогда:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} = \partial_\mu F^{\mu i} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)\begin{pmatrix} -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ 0 & -\mathcal{H}^3 & \mathcal{H}^2 \\ \mathcal{H}^3 & 0 & -\mathcal{H}^1 \\ -\mathcal{H}^2 & \mathcal{H}^1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial E^1}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathcal{H}^3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \mathcal{H}^2}{\partial x^3} \\ -\dfrac{\partial E^2}{\partial t} - \dfrac{\partial \mathcal{H}^3}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \mathcal{H}^1}{\partial x^3} \\ -\dfrac{\partial E^3}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathcal{H}^2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial \mathcal{H}^1}{\partial x^2} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}}.$$

Б) Уравнения Максвелла как уравнения Лагранжа.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) \iff \frac{\partial \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \varnothing .$$

(Прозрачка №14)

Цель: Найти лагранжиан $\mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)$, удовлетворяющий условиям:

а) $\mathcal{L}(\dots)$ – релятивистский инвариант;

б) $\mathcal{L}(\dots)$ – скаляр.

Вопрос: Какие структуры могут входить в $\mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha)$?

Ответ: 1. $j^\alpha j_\alpha \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \varnothing \Rightarrow$ можно не учитывать;

2. $A^\alpha A_\alpha$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = g^{\alpha\nu} A_\alpha + A^\alpha g^\nu_\alpha = 2A^\nu \Rightarrow$ не подходит;

3. $\varepsilon_{\alpha\beta\alpha'\beta'} F^{\alpha\beta} F^{\alpha'\beta'}$ – псевдоскаляр $\Rightarrow$ не подходит;

4. $A^\alpha j^\beta F_{\alpha\beta}$ и $A^\alpha j^\beta(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha)$ не подходят, т.к. $\partial\mathcal{L}/\partial A_\nu$ содержит структуры вида $j^\beta \partial^\nu A_\beta$, которых нет в ур. Максвл.;

5. $A^\alpha A^\beta(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha)$ не подходит из-за $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \sim A^\beta \partial^\nu A_\beta$;

6. $A^\alpha j_\alpha \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = g^{\alpha\nu} j_\alpha = j^\nu \Rightarrow$ правая часть ур. Максвелла!;

7. $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2\left(\partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta - \partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha\right)$, тогда находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\alpha A_\beta + \partial^\alpha A^\beta g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\beta A_\alpha - g^\mu_\beta g^\nu_\alpha \partial^\alpha A^\beta\right) = 4\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = 4F^{\mu\nu} \Rightarrow$$ левая часть ур. Максвелла!.

Таким образом искомый лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu) = \underbrace{-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\text{свободное электромагнитное поле}} \underbrace{- j^\mu A_\mu}_{\text{взаимодействие с электромагнитным током}}$$

Легко видеть, что:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu},$$

т.е. уравнения Лагранжа воспроизводят уравнения Максвелла.

7. Тензор энергии-импульса.

Если ф-ции поля $\varphi_i(x)$ инвариантны относительно преобразований трансляции в 4-х мерии, т.е.:
если $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$ и $\varphi_i(x) = \tilde{\varphi}_i(\tilde{x})$, то есть:

$$\mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x)) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}), \tilde{\partial}_\mu \tilde{\varphi}_i(\tilde{x})),$$

то сохраняется тензор энергии-импульса:

$$T^\mu_\nu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\nu \varphi_i - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \quad \partial_\mu T^\mu_\nu = 0.$$

Покажем это.

$$\delta\varphi_i(x) = \tilde{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x) = \varphi_i(x-a) - \varphi_i(x) \approx \varphi_i(x) - a^\mu \partial_\mu \varphi_i(x) - \varphi_i(x) = -a^\mu \partial_\mu \varphi_i(x);$$

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\mu \varphi_i(x)) =$$
$$= \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(\tilde{x})) =$$
$$= \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x)) - \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x+a), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x+a)) \approx$$
$$\approx \cancel{\mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x))} - \cancel{\mathcal{L}(\tilde{\varphi}_i(x), \partial^\mu \tilde{\varphi}_i(x))} -$$
$$- a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial^\mu \varphi_i(x)) = -a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = -a^\nu \delta^\mu_\nu \partial_\mu \mathcal{L}.$$

С другой стороны, по определению вариации ф-ции двух переменных:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_i)}\delta(\partial_\nu\varphi_i) = \left\{ \begin{matrix} \text{уравнения Лагранжа} \\ \text{для 1-ого слагаемого} \end{matrix} \right\} =$$
$$= \left(\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_i)}\right)\delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_i)}\delta(\partial_\nu\varphi_i) = \left\{ \begin{matrix} \text{полная} \\ \text{производная} \end{matrix} \right\} =$$
$$= \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_i)}\delta\varphi_i\right) = -a^\mu \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_i)}\partial_\mu\varphi_i\right) =$$
$$= -a^\nu \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\partial_\nu\varphi_i\right).$$

Приравнивая обе вариации $\delta\mathcal{L}$ друг к другу в силу произвольности a^ν получаем $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$.