Н.В. Никитин

Диаграммы Фейнмана

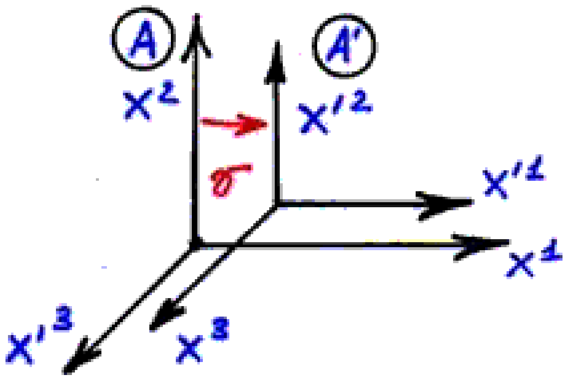
Общие принципы построения квантовой теории поля (КТП)

- Стандартные обозначения, верхние и нижние индексы.
- Система единиц ($\hbar = c = 1$).
- Система единиц Хевисайда ($\alpha_{em} = e^2/4\pi$).
- Закон Кулона и уравнение Максвелла в новой системе единиц.
- Ограничения, накладываемые на измеряемые величины соотношением неопределенности при конечной скорости света.
- Основное отличие КТП от КМ: возможность рождения и уничтожения частиц.
- Чем характеризуются элементарные частицы в эксперименте?
- Типичная постановка задачи в КТП: сечения рассеяния и ширины распадов. Примеры некоторых интуитивно ясных диаграмм Фейнмана.

1. Основные определения в пр-ве Минковского

А) 4-вектора в пр-ве Минковского:

<u>Опр</u>: 4-вектором $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \vec{A})$ называется величина, которая при преобразованиях Лоренца изменяется по закону:



$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix}$$

или $A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu$

суммирование по дважды повторяющимся индексам

<u>Опр:</u> $\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

<u>Опр:</u> A^μ – контравариантный 4-вектор.

<u>Примеры</u>: $x^\mu = (ct, \vec{x})$ и $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$.

Б) Метрический тензор и скалярное произведение:

<u>Опр</u>: скалярным произведением 4-векторов A^μ и B^ν наз. величина: $(AB) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$,

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор.

В пр-ве Минковского:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}(AB) = g_{\nu\mu} A^{\mu} B^{\nu} &= (g_{\nu\mu} A^{\mu}) B^{\nu} = A_{\nu} B^{\nu} \\ &= (g_{\mu\nu} B^{\nu}) A^{\mu} = A^{\mu} B_{\mu}\end{aligned}\right\}$$ полностью эквивалентные записи

Опр: ковариантным 4-вектором называется:

$$A_{\mu} = (A_0, A_1, A_2, A_3) \equiv g_{\mu\nu} A^{\nu} = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A^0, -\vec{A}).$$

Тогда: $$(AB) = A^0 B^0 - (\vec{A}\vec{B}).$$

Важный случай:

$$A^2 = (AA) = A^{\mu} A_{\mu} = A^{0\,2} - \vec{A}^{\,2}$$

Пример: наиболее часто встречающийся в релятивистской теории частиц инвариант: квадрат массы покоя частицы:

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)\left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = p^{\mu} p_{\mu} = p^2,$$ т.е.

$$\boxed{p^2 = m^2c^2}$$

в) 4-градиент:

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}; -\frac{\partial}{\partial x^1}; -\frac{\partial}{\partial x^2}; -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}; -\vec{\nabla}\right)$$

Почему в опр. ∂^{μ} стоит "$-\vec{\nabla}$", а не "$+\vec{\nabla}$"?

Чтобы ввести соответствие с квантовой механикой:

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) = \hat{H}\,\Psi(x) \Rightarrow \hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$; по опр. $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$.

Тогда если ввести 4-оператор $\hat{p}^{\mu} = (\hat{H}, \hat{\vec{p}})$, то:

$$\hat{p}^{\mu} = i\hbar\,\partial^{\mu}.$$

В литературе ∂^{μ} часто обозначают как ∇^{μ}.

г) Символ Кронекера

Опр символом Кронекера называется величина:

$$\delta^{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} \equiv \delta^{\mu}_{\nu} \equiv \delta^{\nu}_{\mu} \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Явные вычисления дают, что для пр-ва Минковского:

$$\delta^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\eta} g^{\mu\eta} \equiv g^{\mu}_{\nu}.$$

д) Полностью антисимметричный тензор 4-ого ранга (псевдотензор 4-ого ранга)

Опр: псевдотензором 4-ого ранга $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ называют величину, удовл. условию: $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}$ и при любой другой нечётной перестановке индексов, но $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \varepsilon^{\nu\alpha\mu\beta}$ и при любой другой чётной перестановке индексов.

Соглашение: $\varepsilon^{0123} = -1$

Примеры: $\varepsilon^{0131} = -\varepsilon^{0131} \Rightarrow \varepsilon^{0131} = 0$

$$\varepsilon^{3210} = -\varepsilon^{0321} = -\varepsilon^{0132} = \varepsilon^{0123} = -1$$

$$\varepsilon^{1302} = \varepsilon^{0132} = -\varepsilon^{0123} = +1$$

Следствие: $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Rightarrow \varepsilon_{0123} = +1$.

Действительно: $\varepsilon^{0123} A_0 A_1 A_2 A_3$ – число, не зависящее от верхних и нижних индексов, поэтому:

$$\varepsilon^{0123} A_0 A_1 A_2 A_3 = \varepsilon_{0123} A^0 A^1 A^2 A^3 = (-1)^3 \varepsilon_{0123} A_0 A_1 A_2 A_3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, т.к. все ненулевые (μ,ν,α,β) получаются перестановками из $(0,1,2,3)$.

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\underbrace{4!}_{} = -24$$

число ненулевых компонент в $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$.

Разобрать

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\xi\eta\alpha\beta} = -2\left(\delta^{\mu}_{\xi}\delta^{\nu}_{\eta} - \delta^{\mu}_{\eta}\delta^{\nu}_{\xi}\right)$$

Стартуем с:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\xi\eta\alpha\beta} = \text{const}\ \det\begin{pmatrix}\delta^{\mu}_{\xi} & \delta^{\mu}_{\eta}\\ \delta^{\nu}_{\xi} & \delta^{\nu}_{\eta}\end{pmatrix}$$

структура, антисимметричная по $\mu \leftrightarrow \nu$ и $\xi \leftrightarrow \eta$

Свёртка: $\mu=\xi$, $\nu=\eta$ $\Rightarrow$ $-24 = \text{const}\cdot 12$ $\Rightarrow$ $\text{const} = -2$

2. Система $\hbar = c = 1$

В квантовой теории поля и в экспериментах по физике эл. частиц $v_{хар} \sim c$.

Признаком квантовости явления можно считать наличие в формуле постоянной Планка $\hbar$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\hbar$ определяет масштаб всех величин в квантовой физике. Поэтому естественно положить:

$$\boxed{\hbar = c = 1}$$

Изменятся размерности физических величин.

$$x = vt \quad p = mv \quad E = mc^2 \quad E = \hbar\omega \sim \hbar/t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [E] = [p] = [m] = [x^{-1}] = [t^{-1}]$$

Орбитальный момент $\vec{J} \sim \vec{x} \times \vec{p}$, действие $S = \int L\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow [v] = [S] = [J] = 1$$

Сила: $F \sim p/t \Rightarrow [F] = [m^2] = [x^{-2}]$

<u>Вопрос</u>: каковы размерности заряда e, электрического E и магнитного H полей?

А) Система единиц СГС

Введём заряды: $Q_1 = q_1 e$ и $Q_2 = q_2 e$, где e – элементарный заряд, равный заряду электрона, т.е. $e = -|e|$, а q_1 и q_2 – безразмерные числа.

Закон Кулона: $|\vec{F}| = \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2} = e^2 \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$.

Поскольку $[F] = [r^{-2}] \Rightarrow [e]_{СГС} = 1$

Электрическая сила: $\vec{F} = Q\vec{E} = eq\vec{E}$

Сила Лоренца: $\vec{F} = \frac{Q}{c}\vec{v}\times\vec{\mathcal{H}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [E]_{СГС} = [D]_{СГС} = [\mathcal{H}]_{СГС} = [B]_{СГС} = [m^2] = [x^{-2}].$$

Ур-нения Максвелла в СГС:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{\mathcal{H}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

Б) "Рационализация" Хевисайда

Предложение: ур-нения Максвелла – фундаментальные уравнения и в них нет места "4π"!

По Хевисайду:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{D} = \rho \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

новая запись закона Кулона:

$$|\vec{F}| = \frac{e^2}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

В) $\hbar = c = 1$ + СГС + "рационализацию Хевисайда" =

= система единиц, используемая в КТП (и везде в моих лекциях!)

В этой системе:

проще невозможно!!!

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t \\ \text{div}\,\vec{D} = \rho \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

Закон Кулона:

$$|\vec{F}| = \frac{e^2}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \alpha_{em}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Постоянная тонкой структуры. На самом деле её величина ЗАВИСИТ от масштаба энергий, при которых происходит процесс.
Однако в области, где справедлив закон Кулона:

$$\alpha_{em} \approx \frac{1}{137} \approx const.$$

Вопрос: какова естественная единица измерения в принятой нами системе?

Ответ: электрон-вольт (эВ) или 1 ГэВ $= 10^9$ эВ.
Реже будем использовать 1 МэВ $= 10^6$ эВ и 1 КэВ $= 10^3$ эВ.

Опр: 1 эВ – это энергия, которую преобрела частица с зарядом, равным модулю заряда электрона, пройдя разность потенциалов в 1 В.

Естественность: ускорители разгоняют заряженные частицы в электрических полях, а детекторы меряют их характеристики в электрических и магнитных полях.

Пересчёты:

$$1\ \text{ГэВ} \approx 1{,}78\cdot 10^{-24}\ \text{гр} \approx 1{,}6\cdot 10^{-10}\ \text{Дж};$$

$$1\ \text{ГэВ}^{-1} \approx 6{,}58\cdot 10^{-25}\ \text{сек} \approx 1{,}97\cdot 10^{-14}\ \text{см};$$

$$|e|\cdot 1\ \text{Тл} \approx 57\ \text{эВ}^2;\quad m_p \approx 1\ \text{ГэВ};\quad m_e \approx 0{,}51\ \text{МэВ}.$$

Внесистемная единица $1\ \Phi = 10^{-13}$ см (1 Ферми) – – определяет "размер" протона.

Для грубых оценок удобно: $1\ \text{ГэВ}^{-1} \approx \frac{1}{5}\ \Phi \approx 5\cdot 10^{-25}$ сек.

3. Что имеет смысл требовать от КТП?

А) В нерелятивистской квантовой механике (НКМ) $E_{хар} \sim m v_{хар}^2 \ll m$ => частицы не могут исчезнуть и не могут родится из-за запрета по величине энергии => стабильные частицы.
Описываются в. ф.: $\Psi(t,\vec{x})$ или $\Psi(t,\vec{p})$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \;+$$

эрмитовский оператор

\+ начальные условия + $\int d\vec{\xi}\, |\Psi(t,\vec{\xi})|^2 = 1$

Пример: свободная частица $\Psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{-iEt+i\vec{p}\vec{x}}$

В КТП возможны распады => $w(t) \sim |\Psi(t,\vec{x})|^2 \sim e^{-\Gamma t}$ =>
=> $E_{КТП} = E - \frac{i}{2}\Gamma$ => $\hat{H}$ – НЕ эрмитов !!!!!! =>
=> операторный подход НКМ для КТП плохо подходит.

Б) В НКМ $v_{хар} \ll 1 \Leftrightarrow c = \infty$ => возможность сколь угодно точного измерения $\vec{p}$ или $\vec{x}$ за сколь угодно малые промежутки времени Δt =>
=> пригодность описания системы в терминах $\Psi(t,\vec{x})$ или $\Psi(t,\vec{p})$. Соотношение неопределённости накладывает ограничение на совместное измерение $\vec{p}$ и $\vec{x}$ ($\Delta p \Delta x \geq 1$), но не на каждое по-отдельности!

В КТП $c = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x \sim \Delta t \\ \Delta p \Delta x \geq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta p \Delta t \geq 1 \Rightarrow$$

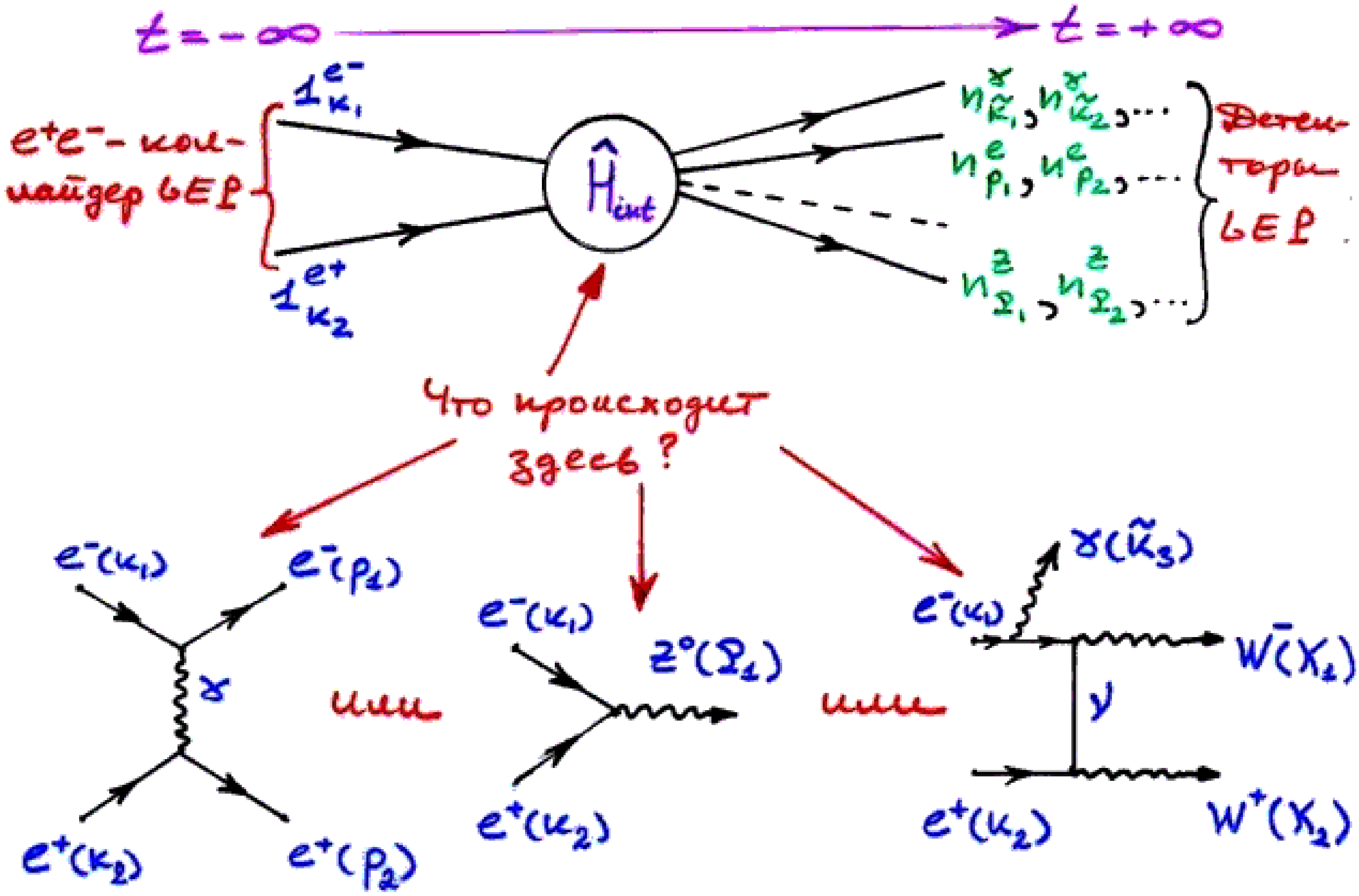
=> $\Delta p \to 0$ т.и т.т. к. $\Delta t \to \infty$ => $\Psi(t,\vec{p})$ не имеет смысла!

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x \sim \Delta t \\ \Delta E \Delta t \geq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x \Delta E \geq 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Для } e^- \text{ в системе покоя } \Delta E \sim m_e \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow x_{\substack{min \\ \text{измеримый}}} \sim \dfrac{1}{m_e} \geq 2\cdot 10^{-3}\ \text{ГэВ}^{-1} \\ \text{Для у.р. } e^- \ \Delta E \sim p \Rightarrow x_{min} \sim \dfrac{1}{p} = \lambda_{\text{де Бройль}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ описание системы в терминах $\Psi(\vec{x}, t)$ в КТП смысла не имеет.

В) Типичная постановка эксперимента в КТП:



Нужно уметь вычислять по известному числу начальных частиц с p_i^μ, s_i и т.д. вероятность возникновения конфигурации конечных частиц к.-л. сортов с p_j^μ, s_j и т.д. при заданном взаимодействии.