Глава 2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

§ 2.1. Инклюзивное сечение рассеяния электронов

Процесс рассеяния электрона в поле ядра или другой электромагнитной системы может быть описан с помощью *S*-матрицы [1,2]:

$$\widehat{S}=\widehat{T}\exp(-i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{H}_{\text{int}}(t)dt), \qquad (2.1)$$

где $\widehat{T}$ означает *T*-упорядоченное (по времени) произведение; $\widehat{H}_{\text{int}}$ – гамильтониан взаимодействия с электромагнитным полем ядра:

$$\begin{aligned}&\widehat{H}_{\text{int}}(t)=\int\widehat{H}_{\text{int}}(\vec{x},t)d^3x,\\&\widehat{H}_{\text{int}}(\vec{x},t)=-e\widehat{j}_{\mu}(\vec{x},t)\widehat{A}_{\mu}(\vec{x},t).\end{aligned} \qquad (2.2)$$

$\widehat{A}_{\mu}(\vec{x},t)$ – оператор электромагнитного поля ядра,

$j_{\mu}(x)=i\overline{\Psi}(x)\gamma_{\mu}\Psi(x)$ – электронно-позитронный ток, причем

$$\Psi(x)=\sum_{\lambda}\int d^4k\{a_{k,\lambda}u_{\lambda}(k)e^{ikx}+b^{+}_{k,\lambda}v_{\lambda}(-k)e^{-ikx}\} \qquad (2.3)$$

где u,v – дираковские спиноры, $u^{+}_{\lambda}(k)u_{\lambda'}(k)=\delta_{\lambda\lambda'}$, $a^{+}_{k,\lambda}(b^{+}_{k,\lambda})$ – операторы рождения электрона (позитрона) с импульсом k и поляризацией λ. В дальнейшем мы будем пользоваться следующей системой обозначений:

$$px\equiv p_{\mu}x_{\mu};x_{\mu}=\{\vec{x},it\};k_{\mu}=\{\vec{k},i\varepsilon\};\mu=1,2,3,4,$$

$k_1(k_2)$ – импульс падающего (рассеянного) электрона; ($\varepsilon_1(\varepsilon_1)$ – энергия падающего (рассеянного) электрона), E_i,E_f – начальная и конечная энергии ядра.

$$q_\mu = \{\vec{q}, i\omega\}; \omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \tag{2.4}$$

q – переданный ядру импульс; $q_\mu^2 = q^2 - \omega^2$. Для реального фотона $q_\mu^2 = 0 \Rightarrow q^2 = \omega^2$, для виртуального фотона

$$q_\mu^2 \geq 0. \tag{2.5}$$

Длины волн, соответствующие переданным импульсам, при росте $\boldsymbol{q}$ становятся много меньше размеров ядра. Эта особенность электронного рассеяния и определяет возможности этого метода в исследовании деталей ядерной структуры.

Рассеяние электрона на ядре (нуклоне) можно изобразить в виде диаграммы Фейнмана, причем матрица рассеяния может быть разложена в ряд по константе электромагнитного взаимодействия (См. рис.1.1).

Каждая вершина диаграммы электромагнитного взаимодействия вносит в соответствующий матричный элемент значение константы $\sqrt{\alpha_e} = \sqrt{e^2/4\pi\hbar c} \Rightarrow e/\sqrt{4\pi}\,(\hbar c = 1)$.

(Эта форма связи константы с величиной элементарного заряда соответствует системе единиц СИ. В этой системе первое из уравнений Максвелла (2.7) коэффициента 4π не имеет.)

Расчет матричных элементов матрицы рассеяния этого процесса ограничивают, как правило, первым порядком разложения. Учет диаграмм более высокого порядка приводит лишь к небольшим поправкам к первому приближению. (Детали вывода формулы сечения рассеяния см. [1,2]).

Матричный элемент первого члена этого разложения:

$$\langle k_2,\lambda_2;f\,|\,S^{(1)}\,|\,k_1,\lambda_1;i\rangle = e\bar{u}_{\lambda_2}(k_2)\gamma_\mu u_{\lambda_1}(k_1)\times$$
$$\times\int d^4x\langle f\,|\,A_\mu(\vec{x},t)\,|\,i\rangle \exp(-iqx). \qquad (2.6)$$

При получении этой формулы как для падающего, так и для рассеянного электрона была использована зависимость от координат в форме (2.3), т.е. в виде плоских волн в пространстве. Если для падающего на ядро электрона это справедливо, то рассеянный электрон испытывает искажение своей волны. Таким образом, излагаемый вывод проводится в рамках т.н. PWBA – (Plain Wave Born Approximation) = борновского приближения с плоскими волнами. (Учет искажения волн делается приближенным образом в т.н. DWBA = Distorted Wave Born Approximation).

Оператор электромагнитного поля связан с оператором тока ядра уравнением Максвелла:

$$\Box\widehat{A}_\mu(\vec{x},t) = -e\widehat{J}_\mu(\vec{x},t). \qquad (2.7)$$

Перейдем к фурье-образам операторов поля и тока:

$$\widehat{A}_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4q\widehat{A}_\mu(q)\exp(iqx)$$

$$\widehat{J}_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4q\widehat{J}_\mu(q)\exp(iqx)$$

Тогда из (2.7) получим:

$$\widehat{A}_\mu(q) = \frac{e}{q_\mu^2}\widehat{J}_\mu(q) \qquad (2.8)$$

Операторы в формулах (2.6-2.8) – операторы в гейзенберговском представлении. Переход к представлению Шредингера:

$$\widehat{J}_\mu(\vec{x},t) = \exp(i\widehat{H}t)\widehat{J}_\mu(\vec{x})\exp(-i\widehat{H}t), \qquad (2.9)$$

где $\widehat{H}$ –ядерный гамильтониан, $\widehat{J}_{\mu}(x)=\{\widehat{\vec{J}}(x), i\widehat{\rho}(x)\}$.

Отсюда для матричных элементов операторов тока:
$\langle f \mid \widehat{J}_{\mu}(\vec{x},t) \mid i\rangle = \langle f \mid \widehat{J}_{\mu}(\vec{x}) \mid i\rangle \exp[i(E_f - E_i)t]$. (2.10)

Подстановка этих выражений в уравнение (2.6) и интегрирование по времени приводит к следующему выражению для матричного элемента матрицы рассеяния:

$$\langle k_2,\lambda_2;f \mid S^{(1)} \mid k_1,\lambda_1;i\rangle = -\frac{e^2}{q_{\mu}^2}\bar{u}_{\lambda_2}(k_2)\gamma_{\mu}u_{\lambda_2}(k_1)\times$$

$$\times\int d^4x\langle f \mid \widehat{J}_{\mu}(\vec{x},t) \mid i\rangle \exp(-iqx) = \frac{e^2}{q_{\mu}^2}\bar{u}_{\lambda_2}(k_2)\gamma_{\mu}u_{\lambda_2}(k_1)\times$$

$$\times\int d^3\vec{x}dt\langle f \mid \widehat{J}_{\mu}(\vec{x}) \mid i\rangle \exp(-iq\vec{x})\exp[i(E_f - E_i)t]\exp(i\omega t) =$$

$$=\frac{e^2}{q_{\mu}^2}\bar{u}_{\lambda_2}(k_2)\gamma_{\mu}u_{\lambda_2}(k_1)\langle f \mid \widehat{J}_{\mu}(\vec{q}) \mid i\rangle\int \exp[i(E_f - E_i + \omega)t]dt =$$

$$=\frac{2\pi e^2}{q_{\mu}^2}\bar{u}_{\lambda_2}(k_2)\gamma_{\mu}u_{\lambda_1}(k_1)\langle f \mid \widehat{J}_{\mu}(\vec{q}) \mid i\rangle\delta(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1) =$$

$$= M_{if}\delta(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1).$$

(2.11)

Квадрат матричного элемента $|M_{if}|^2$ связан с вероятностью перехода в единицу времени:

$$\omega_{i\to f} = 2\pi\,|M_{if}|^2\,\delta(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1). \qquad (2.12)$$

По определению дифференциального сечения процесса

$$d\sigma = \frac{\omega_{i\to f}}{I}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}, \qquad (2.13)$$

где I -плотность потока падающих частиц, $I = {k_1}/{\varepsilon_1}$.

Проведя суммирование по поляризациям рассеянного электрона λ_2 и усреднение по поляризациям падающего электрона λ_1, получим выражение для дифференциального сечения рассеяния неполяризованного электрона на ядре:

$$d\sigma = \frac{4\alpha^2}{q_\mu^2}\frac{1}{k_1}[2(J_\mu Q_\mu)(J_\nu^* Q_\nu) + \frac{1}{2}q_\mu^2 J_\mu J_\mu^*] \times \delta(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1)\frac{d^3 k_2}{2\varepsilon_2}.$$

Здесь

$$J_\mu^*(\vec{q}) = \{\overline{J}(\vec{q}), i\rho^*\}; J_\mu(\vec{q}) = \langle f \,|\, \widehat{J}_\mu(\vec{q}) \,|\, i\rangle,$$
$$Q_\mu = \frac{1}{2}(k_2 + k_1)_\mu; \alpha = \frac{1}{137} = \frac{e^2}{4\pi}. \qquad (2.14)$$

Начальное и конечное состояния ядра-мишени – состояния с определенными значениями проекций полного момента M_i, M_f. Усреднение (2.14) по начальным значениям проекции момента M_i и суммирование по конечным значениям M_f дает для дифференциального сечения следующее выражение:

$$d\sigma = \frac{4\alpha^2}{q_\mu^2}\frac{d^3 k_2}{2k_1\varepsilon_2}\frac{1}{2J_i + 1}\sum_{M_i, M_f}[2(J_\mu Q_\mu)(J_\nu^* Q_\nu) + \frac{1}{2}q_\mu^2 J_\mu J_\mu^*] \times$$
$$\times \delta(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1). \qquad (2.15)$$

При выводе соотношений (2.15) использован закон сохранения заряда (уравнение непрерывности):

$$\frac{\partial J_\mu(\vec{x})}{\partial x_\mu} = 0 \Rightarrow q_\mu J_\mu(\vec{q}) = \vec{q}\vec{J} - \omega\rho = 0. \qquad (2.16)$$

Таким образом, сечение рассеяния электронов на ядре является функцией матричных элементов операторов плотности ядерного тока $\widehat{J}(q)$ и ядерного заряда $\widehat{\rho}(q)$.

С целью использования для квантовых переходов правил отбора по четности и моменту количества движения, в формуле (2.15) проводится **мультипольное разложение операторов плотности заряда и тока.**

Рассмотрим оператор плотности заряда ядра $\widehat{\rho}(x)$. Матричный элемент Фурье-образа этого оператора:

$$< J_f M_f \mid \widehat{\rho}(\vec{q}) \mid J_i M_i >= \int e^{-i\vec{q}\vec{x}} < J_f M_f \mid \widehat{\rho}(\vec{x}) \mid J_i M_i > d^3x. \qquad (2.17)$$

Используя разложение плоской волны по мультиполям:

$$e^{-i\vec{q}\vec{x}} = 4\pi \sum_{J,M} (-i)^J j_J(qx) Y_{JM}(\Omega_x) Y^*_{JM}(\Omega_q) \qquad (2.18)$$

получим:

$$< J_f M_f \mid \widehat{\rho}(\vec{q}) \mid J_i M_i >=$$
$$= 4\pi \sum_{J,M} (-i)^J Y^*_{JM}(\Omega_q) < J_f M_f \mid \int j_J(qx) Y_{JM}(\Omega_x) \widehat{\rho}(\vec{x}) d^3x \mid J_i M_i > \qquad (2.19)$$

Здесь $j_J(qx)$ – сферическая функция Бесселя, $Y_{JM}(\Omega)$ – обобщенные сферические функции.

Определение:

$$\widehat{M}^{coul}_{JM}(q) = \int j_J(qx) Y_{JM}(\Omega_x) \widehat{\rho}(\vec{x}) d^3x. \qquad (2.20)$$

Оператор $M^{coul}_{JM}(q)$ – неприводимый тензорный оператор ранга J в гильбертовом пространстве волновых функций состояний ядра. Матричный элемент оператора плотности заряда можно свести к приведенным матричным элементам оператора $\widehat{M}^{coul}_{JM}(q)$ с помощью **теоремы Вигнера-Эккарта**:

$$< J_f M_f \mid \hat{\rho}(\vec{q}) \mid J_i M_i >= 4\pi \sum_{JM} (-i)^J Y^*_{JM}(\Omega_q) \frac{< J_f M_f \mid JMJ_i M_i >}{\sqrt{2J_f + 1}} \times$$

$$\times < J_f \parallel \hat{M}^{coul}_{JM} \parallel J_i > \tag{2.21}$$

Суммирование по M_f и усреднение по M_i (проекциям спинов ядер) в формуле (2.21) дает возможность свести один из элементов формулы (2.15) к сумме по J матричных элементов оператора $\hat{M}^{coul}_{JM}(q)$, т.е. произвести ***разложение по мультиполям***:

$$\frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i M_f} |< J_f M_f \mid \hat{\rho}(\vec{q}) \mid J_i M_i >|^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_{J=0}^{\infty} |< J_f \parallel M^{coul}_{JM} \parallel J_i >|^2 \tag{2.22}$$

Проведение аналогичного анализа операторов пространственного тока представляет несколько большую сложность. При выводе используется разложение трехмерного вектора $\hat{J}(\vec{q})$ по сферической системе ортов (рис.2.1), связанной с вектором $\vec{q}$:

$$\vec{J}(\vec{q}) = \sum_{\lambda=0,\pm1} J_\lambda(\vec{q})(\vec{e}_{q_\lambda})^+ \tag{2.23}$$

$$\vec{e}_{q_{\pm1}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i e_y); \; \vec{e}_{q_0} = \vec{e}_z = \frac{\vec{q}}{q}; \; \vec{e}_{q_\lambda} \vec{J}(\vec{q}) = J_\lambda(\vec{q}). \tag{2.24}$$

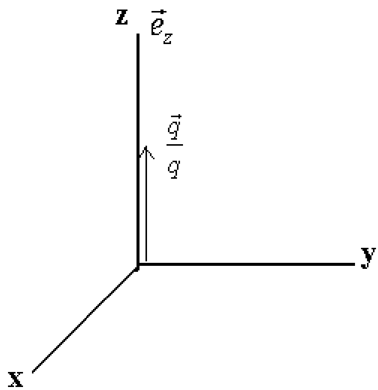

Рис.2.1.

Из уравнения непрерывности (2.16) следует, что **независимыми являются** только **поперечные компоненты** тока:

$$q_\mu J_\mu(\vec{q}) = \vec{q}\vec{J} - \omega\rho = \vec{e}_{q_0} q\vec{J}(\vec{q}) - \omega\rho = 0$$

$$\vec{e}_{q_0}\vec{J}(\vec{q}) = \frac{\omega\rho}{q}. \qquad (2.25)$$

Определим неприводимые операторы ранга J в пространстве состояний ядра:

$$\widehat{T}^{el}_{JM} = \frac{1}{q}\int[\vec{\nabla} \times j_J(qx)\vec{Y}^M_{JJ_1}(\Omega_x)]\widehat{\vec{J}}(\vec{x})d^3x, \qquad (2.26)$$

$$\widehat{T}^{mag}_{JM} = \int j_J(qx)\vec{Y}^M_{JJ_1}(\Omega_x)\widehat{\vec{J}}(\vec{x})d^3x. \qquad (2.27)$$

Здесь $\vec{Y}_{JJ_1}$ – векторная сферическая функция.

$$\vec{Y}^M_{JJ_1} = \sum_{m;m'=0\pm1}(J_1 m\ 1m' \mid Jm)Y_{Jm}\vec{e}_{m'} \qquad (2.28)$$

Сводя (с помощью разложения по мультиполям) матричные элементы операторов тока к суммам матричных элементов операторов (2.26), (2.27), получим:

$$\frac{1}{2J_i+1}\sum_{M_i,M_f} J_\lambda(\vec{q})J^*_{\lambda'}(\vec{q}) = \frac{2\pi\delta_{\lambda\lambda'}}{2J_i+1}\times$$
$$\times\sum_{J=1}^{\infty}\{|<J_f\,\|\,\widehat{T}^{el}_J\,\|\,J_i>|^2 + |<J_f\,\|\,\widehat{T}^{mag}_J\,\|\,J_i>|^2\}. \tag{2.29}$$

Подстановка (2.29) и (2.22) в (2.15) позволяет выразить дифференциальное сечение рассеяния электрона на ядре через приведенные матричные элементы мультипольных операторов $\widehat{M}^{coul}_{JM}$, $\widehat{T}^{el}_{JM}$ и $\widehat{T}^{mag}_{JM}$ и получить выражение для инклюзивного дифференциального сечения рассеяния электрона на ядре:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi\sigma_M}{1+\dfrac{2\varepsilon_1}{M_T}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\left\{(\frac{q_\mu^4}{q^4})F_L^2(q,\omega) + (\frac{q_\mu^2}{2q^2}+tg^2\frac{\theta}{2})F_T^2(q,\omega)\right\}, \tag{2.30}$$

где $\sigma_M = \alpha\cos^2\frac{\theta}{2}\Big/4\varepsilon_1^2\sin^4\frac{\theta}{2}$ – т.н. мотовское сечение; θ – угол рассеяния, $\eta_R = 1+\left(2E_1\sin^2\theta/2\right)\Big/M_T$ – фактор отдачи; M_T – масса ядра-мишени, $q_\mu^2 = q^2-\omega^2$ – переданный ядру импульс, ω – переданная ядру энергия.

Учитывая, что в $\left(e,e'\right)$- реакциях, как правило, $q >> \omega$ и поэтому $q_\mu^2 \approx q^2$, формулу (2.30) можно записать в упрощенном виде:

$$\frac{d\sigma(e,e')}{d\Omega}=\frac{4\pi\sigma_M}{\eta_R}\left\{F_L^2(q,\omega)+\left(\frac{1}{2}+tg^2\frac{\theta}{2}\right)F_T^2(q,\omega)\right\} \quad . \tag{2.31}$$

Зависимость сечения рассеяния от структуры ядра сосредоточена в величинах $F_L(q,\omega)$ и $F_T(q,\omega)$, называемых обычно **продольным (кулоновским) и поперечным формфакторами (longitudinal and transverse form factors).**

(В последнее время в литературе вместо этого термина часто используется термин «nuclear response surfaces» - поверхности ядерного отклика)

$$F_L^2(q)=\frac{1}{2J_i+1}\sum_{J=0}^{\infty}|<J_f\,||\,\widehat{M}_J^{coul}\,||\,J_i>|^2 \ , \tag{2.32}$$

$$F_T^2(q)=\frac{1}{2J_i+1}\sum_{J=1}^{\infty}\{|<J_f\,||\,\widehat{T}_J^{el}\,||\,J_i>|^2+|<J_f\,||\,\widehat{T}_J^{mag}\,||\,J_i>|^2\} \tag{2.33}$$

При выводе (2.30,2.31) было произведено суммирование либо усреднение по поляризациям как ядра-мишени, так и падающего электрона. Поэтому результат этого вывода – ***инклюзивное сечение рассеяния*** электрона в борновском приближении с плоскими волнами - PWBA.

Часто в научной литературе эта же формула выглядит несколько иначе:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mathrm{Z}^2\sigma_\mathrm{M}}{\eta_\mathrm{R}}\{\mathrm{F}_\mathrm{L}^2(\mathrm{q},\omega)+(\frac{1}{2}+\mathrm{tg}^2\,\frac{\theta}{2})\mathrm{F}_\mathrm{T}^2(\mathrm{q},\omega)\} \tag{2.34}$$

Различию этих формул соответствуют разные определения величин формфакторов:

1) $F_L^2(q,\omega), F_T^2(q,\omega) \Rightarrow$ см. (2.30-2.31)

2) $\mathrm{F}^2_{L,T}(q,\omega) = \dfrac{4\pi}{Z^2} F^2_{L,T}(q,\omega)$ см.(2.34) (2.35)

§ 2.2. Свойства формфакторов

Как продольный, так и поперечный формфакторы являются суммами т.н. ***мультипольных формфакторов:***

$$F_L^2(q,\omega) = \sum_{J=0} F_{CJ}^2;$$
$$F_T^2(q,\omega) = \sum_{J=1} (F_{EJ}^2 + F_{MJ}^2). \tag{2.36}$$

Здесь

$$F_{CJ}^2 = \frac{1}{2J_i+1}\left|\left\langle J_f \left\| \widehat{M}_J^{coul} \right\| J_i \right\rangle\right|^2. \tag{2.37}$$

$$F_{EJ}^2 = \frac{1}{2J_i+1}\left|\left\langle J_f \left\| \widehat{T}_J^{el} \right\| J_i \right\rangle\right|^2;\ F_{MJ}^2 = \frac{1}{2J_i+1}\left|\left\langle J_f \left\| \widehat{T}_J^{mag} \right\| J_i \right\rangle\right|^2. \tag{2.38}$$

Продольные, или «кулоновские» формфакторы F_{CJ} содержат информацию о рассеянии электрона на кулоновском поле ядра, созданном **ядерным электрическим зарядом.** Термин «продольный» отражает связь (2.25), т.е. тот факт, что в силу закона сохранения электрического заряда продольный компонент трехмерного ядерного тока равен (с точностью до множителей) заряду ядра. Мультипольные «электрические» и «магнитные» формфакторы F_{EJ}, F_{MJ} содержат информацию о взаимодействии налетающего электрона с **внутриядерным током**. Ток $\widehat{\vec{J}}(\vec{x})$ содержит три компонента: ток перемещения протонов внутри ядра $\vec{J}_{Coul}$, ток намагничения, создаваемый за счет изменения направлений магнитных моментов нуклонов $\vec{J}_{magn}$ и $\vec{J}_{MEC}$ – ток, создаваемый мезонами в процессе обменного взаимодействия нуклонов ядра (MEC = Meson Exchange Currents):

$$\vec{J}(\vec{x}) = \vec{J}_{Coul} + \vec{J}_{magn} + \vec{J}_{MEC} \qquad (2.39)$$

Диаграммы, соответствующие главным вкладам мезонных обменных токов в картину взаимодействия виртуального либо реального кванта с нуклонами , показаны на рис. 2.2

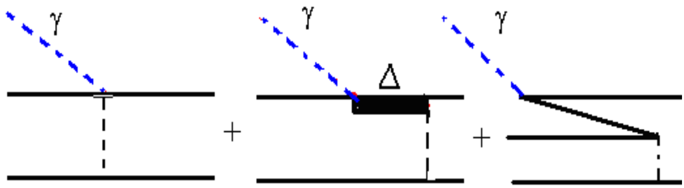

Рис.2.2. Мезонные обменные токи

Мультипольные формфакторы F_{EJ} и F_{MJ} не интерферируют между собой, поскольку генерирующие их мультипольные операторы имеют противоположные четности: $(-1)^{J}$ для F_{EJ}^{2} и $(-1)^{J-1}$ для F_{MJ}^{2}.

Операторы в формулах (2.37-2.38) действуют не только в конфигурационном, но и в изоспиновом пространстве, являясь в последнем суммой изоскаляра и изовектора. С учетом приведения по изоспину T выражение для мультипольных формфакторов принимает вид (теорема Вигнера-Эккарта):

$$F_{KJ}^{2} = \left(2J_i + 1\right)^{-1}\left(2T_f + 1\right)^{-1}\left|\left\langle T_i M_{T_i} T 0 \middle| T_f M_{T_f}\right\rangle\right|^{2}\left|\left\langle J_f T_f \middle\| \sum \widehat{O}_{JT} \middle\| J_i T_i\right\rangle\right|^{2} \qquad (2.40)$$

Поскольку формфакторы зависят от q и ω, но не от угла рассеяния θ, построение графика зависимости сечения от $tg^{2}\theta/2$ при фиксированных q,ω (метод Розенблюта) позволяет разделить вклады продольного и поперечного формфакторов в инклюзивное сечение (e,e').

Другим методом разделения формфакторов является измерение сечений при угле $\theta = 180^\circ$, когда вклад продольного формфактора равен нулю. В этом случае сечение содержит только поперечный формфактор:

$$\frac{d\sigma(e,e')}{d\Omega}\Big|_{\theta=180} = \frac{\pi\alpha^2}{\varepsilon_1^2}\left(1+\frac{2\varepsilon_1}{M_T}\right)^{-1} F_T^2(q,\omega) \qquad (2.41)$$

В приближении точечных нуклонов матричные элементы мультипольных операторов являются линейными комбинациями одночастичных операторов, построенных из операторов спина $\hat{\sigma}$, углового момента $\hat{\nabla}$ и сферических функций Y_{JM}:

$$\hat{M}_{JM}^{coul} = \sum_{i=1}^{A} \hat{e}_i j_J(qr_i)\,\mathrm{Y}_{JM}(\Omega_i); \qquad (2.42)$$

$$\hat{T}_{JM}^{el} = \frac{q}{2M}\sum_{i=1}^{A}\{\hat{\mu}_i j_J(qr_j)\left[\mathrm{Y}_J(\Omega_j)\times\hat{\sigma}_j\right]^{JM} +$$
$$+\frac{2\hat{e}_i}{q}\left(\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\,j_{J-1}(qr_j)[Y_{J-1}(\Omega_j)\times\hat{\nabla}_j]^{JM} - \right. \qquad (2.43)$$
$$\left.-\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\,j_{J+1}(qr_j)\left[\mathrm{Y}_{J+1}(\Omega_i)\times\hat{\nabla}_i\right]^{JM}\right)\}$$

$$\widehat{T}_{JM}^{mag} = \frac{iq}{2M}\sum_{i=1}^{A}\{\widehat{\mu}_i(\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}j_{J-1}\left(qr_i\right)\left[\mathrm{Y}_{J-1}\left(\Omega_i\right)\times\widehat{\sigma}_i\right]^{JM} -$$

$$-\sqrt{\frac{J}{2J+1}}j_{J+1}\left(qr_i\right)\left[\mathrm{Y}_{J+1}\left(\Omega_i\right)\times\widehat{\sigma}_i\right]^{JM}) -$$

$$-\frac{2\widehat{e}_i}{q}\left(j_J\left(qr_i\right)\left[\mathrm{Y}_J\left(\Omega_i\right)\times\widehat{\nabla}_i\right]^{JM}\right)\}$$

(2.44)

Здесь M – масса нуклона, $\widehat{e}_i, \widehat{\mu}_i$ – операторы заряда и магнитного момента в пространстве изоспина:

$$\widehat{e}_j = e_0 + e_1\widehat{\tau}_{3i} = \frac{1}{2}(I + \widehat{\tau}_{3j}) \qquad (2.45)$$

$$\widehat{\mu}_i = \mu_0 + \mu_1\widehat{\tau}_{3i} = \frac{\mu_p + \mu_n}{2}I + \frac{\mu_p - \mu_n}{2}\widehat{\tau}_{3i} \qquad (2.46)$$

$\mu_p = 2.793,\ \mu_n = -1.913$, – магнитные моменты протона и нейтрона в ядерных магнетонах.

В формулах (2.42-2.44) операторы, содержащие $\widehat{\mu}_i$, соответствуют учету взаимодействия электрона с ядерным током намагничения (т.е. спиновым током); операторы, содержащие $\widehat{e}_j$ отражают взаимодействие электрона с ядерными зарядами и кулоновским (конвекционным) током.

Использование формул (2.42-2.44) для приближения точеных нуклонов некорректно в области высоких энергий электронов, когда конечные размеры нуклонов влияют на результат рассеяния. Поэтому в формулы для эффективного сечения рассеяния (2.30-2.31) вводят дополнительный множитель – формфактор конечных размеров нуклона

$$f_{SN}=\left(1+q^2/q_N^2\right)^{-1},q_N\approx 855MeV; \qquad (2.47)$$

Поскольку в качестве волновых функций начального и конечного состояний ядра, как правило, используют волновые функции модели оболочек, полученные в потенциале трехмерного гармонического осциллятора (ВФГО), зависящие от 3A пространственных переменных, в правую часть формулы (2.9) также необходимо ввести поправку f_{CM}, связанную с движением центра масс ядра в приближении волновых функций ВФГО:

$$f_{CM}(q)=\exp\left(\frac{1}{A}\left(\frac{qb}{2}\right)^2\right), \qquad (2.48)$$

где b – осцилляторный параметр.

Изложенный выше формализм расчета мультипольных формфакторов построен в так называемом борновском приближении с плоскими волнам (PWBA), и поэтому не учитывает эффекта искажения электронных волн в кулоновском поле ядра. Чем больше заряд ядра-мишени, тем сильнее искажается электронная волна в поле ядра. При расчетах сечений необходимо учесть и этот эффект искажения. Однако для легких ядер с небольшим Z искажения невелики, и их можно приближенно учесть, сравнивая результаты расчета в PWBA с экспериментальными точками, сдвинутыми вверх по оси q и являющимися, таким образом, функцией q_{eff}, который связан с q соотношением

$$q_{eff}=q\left(1+f(q)\left(\frac{Ze^2}{2E_1R}\right)\right), \qquad (2.49)$$

где E_1 –энергия падающего электрона, R – радиус сферы, эквивалентной ядру-мишени, $f(q)$ – эмпирически подбираемая функция переданного импульса q. (Как правило, экспериментальные результаты приводятся с этой поправкой).

При небольших энергиях первичного пучка и малых углах рассеяния, когда $q \approx \omega$, эксперименты по (e,e')-рассеянию содержат практически ту же информацию, что и фотоядерные реакции. Для фотоядерных реакций $q_\mu^2 = 0$, и сечение поглощения реального фотона с энергией ω связано только с поперечным формфактором в точке $q=\omega$ (т.н. «фототочке»= «photopoint»)

$$\int \sigma_\gamma(\omega)d\omega = \frac{8\pi^2\alpha}{\omega} F_T^2(q=\omega), \qquad (2.50)$$

где $\int \sigma_\gamma(\omega)d\omega$ – сечение поглощения, проинтегрированное по резонансу.

Анализ формул (2.42-2.44) показывает, что относительный вклад спиновых мод $j_L(qr)\left[\mathrm{Y}_L \times \hat{\sigma}\right]_{JM}$ в электрические и магнитные формфакторы растет при увеличении q.

В длинноволновом пределе $(q \to 0)$ имеет место подобие q-зависимостей продольного и поперечного электрических формфакторов (**теорема Зигерта):**

$$F_{EJ}\Big|_{q\to 0} = \frac{\omega}{q}\left(\frac{J+1}{J}\right)^{1/2} F_{CJ} \qquad (2.51)$$

Из теоремы Зигерта следует, что при малых переданных ядру импульсах основной вклад в формирование ядерного отклика на внешнее возбуждение дает взаимодействие с орбитальным током. При более высоких q,когда в возбуждении EJ-мультиполей значительную роль начинают играть спиновые моды, поведение CJ- и EJ-формфакторов становится существенно различным.

Операторы $\widehat{M}^{Coul}_{JM}, \widehat{T}^{el}_{JM}, \widehat{T}^{mag}_{JM}$, действующие в пространстве волновых функций ядра, являются эрмитовыми операторами. В квантовой теории доказывается важное соотношение для приведенных по моменту и изоспину матричных элементов этих операторов:

$$\left\langle J_f T_f \left|\left\|\widehat{O}_{J,T}\right\|\right| J_i T_i \right\rangle = (-1)^{T_f - T_i} \times (-1)^{J_f - J_i} \times$$

$$\times (-1)^{J-\eta} \left\langle J_i T_i \left|\left\|\widehat{O}_{J,T}\right\|\right| J_f T_f \right\rangle \qquad (2.52)$$

В формуле (2.52) η =0 для кулоновского оператора $\widehat{M}^{Coul}_{JM}$ и η =1 для операторов $\widehat{T}^{el}_{JM}, \widehat{T}^{mag}_{JM}$.

Для упругого рассеяния электронов на ядрах начальное и конечное состояния ядра совпадают: $\left| f \right\rangle = \left| i \right\rangle, T_f = T_i, J_f = J_i$. Поэтому для кулоновского упругого рассеяния, когда η=0, выполнение условия (2.52) требует, чтобы

$$\left\langle J_i T_i \left|\left\|\widehat{O}_{J,T}\right\|\right| J_i T_i \right\rangle = (-1)^J \left\langle J_i T_i \left|\left\|\widehat{O}_{J,T}\right\|\right| J_i T_i \right\rangle \Rightarrow (-1)^J = 1$$ т

.е. в зарядовом упругом рассеянии (продольный формфактор) участвуют только мультипольные операторы с четными значениями *J*. Для поперечных мультипольных формфакторов η=1 и $(-1)^{J-\eta}=(-1)^{J-1}=1$. Поэтому из $\left| f \right\rangle = \left| i \right\rangle$ следует, что в поперечный формфактор упругого рассеяния дают вклады только мультипольные операторы с нечетными значениями момента (ранга оператора). Это правило исключает электрические мультипольные формфакторы *EJ* – они не могут принимать участие в упругом рассеяния, т.к. при упругом рассеянии **не меняется** четность системы, а для *EJ* переходов она равна $(-1)^J=(-1)$ для нечетных ***J***.

Магнитные мультипольные формфакторы *MJ* с **нечетными** значениями *J* в упругом рассеянии могут участвовать (см. таблицу). Вторая строка таблицы соответствует действующему оператору; третья –четности оператора.

F_{CJ}	F_{EJ}	F_{MJ}
$\widehat{M}_{JM}^{Coul}$	$\widehat{T}_{JM}^{el}$	$\widehat{T}_{JM}^{mag}$
$P=(-1)^J$	$P=(-1)^J$	$P=(-1)^{J+1}$
$(-1)^{J-\eta}=(-1)^J$	$(-1)^{J-\eta}=(-1)^{J-1}$	$(-1)^{J-\eta}=(-1)^{J-1}$
Возможно, $J=2n$	Невозможно	Возможно, $J=2n+1$

§ 2.3 Расчет матричных элементов мультипольных операторов

$$\left\langle n'l'j'\right\| j_J(qr)Y_J(\Omega)\left\| nlj\right\rangle=(-1)^{J+j+1/2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\times$$

$$\times\sqrt{(2l'+1)(2l+1)(2j'+1)}\times\sqrt{(2j+1)(2J+1)}\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} l' & j' & 1/2 \\ j & l & J \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} l' & J & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left\langle n'l'\right| j_J(qr)\left| nl\right\rangle.$$

$$\left\langle n'l'j'\right\| j_L(qr)\left[Y_L\times\vec{\nabla}\right]^J\left\| nlj\right\rangle=(-1)^{l'+j-1/2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\times$$

$$\times\sqrt{(2l'+1)(2l+1)(2j'+1)}\times\sqrt{(2j+1)(2J+1)(2L+1)}\times$$

$$\begin{Bmatrix} l' & j' & 1/2 \\ j & l & J \end{Bmatrix}\times\left(\widehat{D}_L^- +\widehat{D}_L^+\right),$$

где

$$\widehat{D}_L^- = \begin{Bmatrix} L & 1 & J \\ l & l' & l+1 \end{Bmatrix} \times \frac{\begin{pmatrix} l' & L & l+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l+1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \times$$

$$\times \frac{l+1}{2l+1} \left\langle n'l' \middle| j_L(qr) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \middle\| nl \right\rangle;$$

$$\widehat{D}_L^+ = \begin{Bmatrix} L & 1 & J \\ l & l' & l-1 \end{Bmatrix} \times \frac{\begin{pmatrix} l' & L & l-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l-1 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \times$$

$$\times \frac{l}{2l+1} \left\langle n'l' \middle| j_L(qr) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) \middle\| nl \right\rangle.$$

$$\left\langle n'l'j' \middle\| j_J(qr) \left[Y_L \times \vec{\sigma} \right]^J \middle\| nlj \right\rangle = (-1)^{l'} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\pi}} \times$$

$$\times \sqrt{(2l'+1)(2l+1)(2j'+1)(2j+1)} \sqrt{(2J+1)(2L+1)} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} l' & l & L \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ j' & j & J \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l' & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\langle n'l' \middle| j_J(qr) \middle| nl \right\rangle. \tag{2.53}$$

В вышеприведенных формулах

$$\langle n'l'|j_J(qr)|nl\rangle = \int_0^\infty R_{n'l'}(r)j_J(qr)R_{nl}(r)r^2dr.$$

Если используются волновые функции гармонического осциллятора (ВФГО), то

$$\langle 1l'|j_L(qr)|1l\rangle = \frac{2^{L/2}}{(2L+1)!!}y^{L/2}\exp(-y)\frac{(l'+l+L+1)!!}{[(2l'+1)!!(2l+1)!!]^{1/2}}\times$$

$$\times F\left[\frac{1}{2}(L-l'-l);L+3/2;y\right],$$

$$F(a,c,y) = 1+\frac{a}{c}y+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{y^2}{2!}+......$$

(2.53a)

Для волновых функций в потенциале трехмерного гармонического осциллятора (ВФГО) существуют следующие рекуррентные соотношения:

$$|2l\rangle = (l+3/2)^{1/2}|1l\rangle - (l+5/2)^{1/2}|1l+2\rangle,$$

$$|3l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}[(l+5/2)(l+3/2)]^{1/2}|1l\rangle - 2(l+5/2)|1l+2\rangle + \\ [(l+9/2)(l+7/2)]^{1/2}|1l+4\rangle\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\left(\frac{d}{dr}-\frac{l}{r}\right)\right|1l\rangle = -\frac{1}{b}(l+3/2)^{1/2}|1l+1\rangle;$$

$$\left|\left(\frac{d}{dr}+\frac{l+1}{r}\right)\right|1l\rangle = \frac{1}{b}[2(2l+1)]^{1/2}|1l-1\rangle - \frac{1}{b}(l+3/2)^{1/2}|1l+1\rangle.$$

Здесь

$b = \sqrt{\hbar/\mu\omega}$ – параметр осцилляторной функции.

$$\langle 1l' | j_L(qr) | 1l \rangle = \frac{2^{L/2}}{(2l+1)!!} y^{L/2} \exp(-y) \times$$

$$\times \frac{(l'+l+L+1)!!}{\left[(2l'+1)!!(2l+1)!!\right]^{1/2}} \cdot F\left(\frac{1}{2}(L-l'-l); L+3/2; y\right),$$

причем гипергеометрическая функция $F(a,b,y)$ представляет собой конечный ряд:

$$F(a;b;y) = 1 + \frac{a}{b} y + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{y^2}{2!} + \ldots$$

§ 2.4. Переходные плотности заряда и тока

Экспериментальное исследование формфакторов F_{CJ}, F_{EJ}, F_{MJ} при различных переданных ядру импульсах позволяет получить информацию о пространственном распределении матричных элементов заряда и тока мишени. Эта возможность является результатом связи между мультипольными формфакторами и распределениями плотностей заряда и тока через преобразование Фурье Бесселя:

$$F_{CJ}(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2J_i+1}}\right) \int_0^\infty \rho_J(r) j_J(qr) r^2 dr;$$

$$F_{EJ} = \left(\frac{1}{\sqrt{2J_i+1}}\right) \int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \cdot \rho_{JJ-1}(r) j_{J-1}(qr) - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \cdot \rho_{JJ+1}(r) j_{J+1}(qr)\right] r^2 dr;$$

$$F_{MJ} = \left(\frac{1}{\sqrt{2J_i+1}}\right) \int_0^\infty \rho_{JJ}(r) j_J(qr) r^2 dr. \qquad (2.54)$$

Введенные в (2.54) величины ***ρ(r)*** называются ***переходными плотностями*** [3]. Они являются матричными элементами операторов заряда и тока между начальным и конечным состояниями мишени:

$$\rho_J(r) = \int \left\langle J_f \alpha_f \left\| \hat{\rho}(r) Y_J(\Omega) \right\| J_i \alpha_i \right\rangle d\Omega,$$
$$\rho_{JJ'}(r) = \int \left\langle J_f \alpha_f \left\| \hat{\vec{J}}(r) Y_{JJ'1}(\Omega) \right\| J_i \alpha_i \right\rangle d\Omega. \qquad (2.55)$$

$\hat{\vec{J}}(r), \hat{\rho}(r)$ - операторы тока и заряда. Символом ***α*** обозначены все квантовые числа данного состояния, кроме спина и его проекции. Формулы (2.55) соответствуют приближению однофононного обмена. Структура сечения рассеяния будет определяться переходными лотностями $\hat{\rho}_J(r), \hat{\rho}_{JJ-1}(r), \hat{\rho}_{JJ+1}(r)$ для электрических переходов и переходной плотностью $\hat{\rho}_{JJ}(r)$ для магнитных переходов. Из закона сохранения заряда (уравнения непрерывности) следует связь переходных плотностей

$$\omega\sqrt{2J+1}\hat{\rho}_J(r) = \sqrt{J}\left(\frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r}\right)\hat{\rho}_{JJ-1}(r) - \sqrt{J+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{J+1}{r}\right)\hat{\rho}_{JJ+1}(r).$$

С помощью этого соотношения можно установить связь продольного и поперечного электрических формфакторов:

$$F_{EJ}(q) = -\frac{\omega}{q}\sqrt{\frac{J+1}{J}}F_{CJ}(q) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\int_0^\infty \hat{\rho}_{JJ+1}(r)\, j_{J+1}(qr) r^2 dr.$$

Благодаря обратному преобразованию Фурье-Бесселя возможно определение переходных плотностей из формфакторов:

$$\widehat{\rho}_J(r)=\frac{2\sqrt{2J_i+1}}{\pi}\int_0^\infty F_{CJ}(q)j_J(qr)q^2dq;$$

$$\widehat{\rho}_{JJ+1}(r)=-\frac{2\sqrt{J(2J_i+1)}}{\pi\sqrt{2J+1}}\int_0^\infty\left[F_{EJ}(q)+\frac{\omega}{q}\sqrt{\frac{J+1}{J}}F_{CJ}(q)\right]j_{J+1}(qr)q^2dq;$$

$$\widehat{\rho}_{JJ}(r)=\frac{2\sqrt{2J_i+1}}{\pi}\int_0^\infty F_{MJ}(q)j_J(qr)q^2dq.$$

(2.56)

Из (2.56) видно, что получение точных значений переходных плотностей требует измерений формфакторов вплоть до бесконечно высоких значений ***q***, что нереально. На практике интегралы в (2.56) обрезают при высоких переданных импульсах, достигнутых в эксперименте. Поскольку формфакторы представляют собой очень быстро спадающие функции переданного импульса, возникающие погрешности сравнительно невелики.

§ 2.5. Эксклюзивные сечения рассеяния электронов

На сильноточных электронных ускорителях с высоким D-фактором возможно проведение эксклюзивных экспериментов. В инклюзивных экспериментах эффективное сечение рассеяния исследуется как функция характеристик рассеянного электрона – его энергии, угла рассеяния и переданного импульса. Инклюзивные сечения – это сечения рассеяния неполяризованного электрона на неполяризованной мишени.

Гораздо более богатая информация о свойствах мишени может быть получена из эксклюзивных экспериментов, поскольку в них сечение изучается как функция целого ряда переменных. Например, сечение рассеяния электрона на ядре может быть исследовано как функция переданных энергии и импульса и, одновременно как функция кинематических характеристик вылетающего из возбужденного ядра нуклона или кластера. (Именно для таких экспериментов был сооружен зал A1 на ускорителе MAMI – рис.1.4). К эксклюзивным экспериментам относятся все эксперименты по схемам совпадений и эксперименты на поляризованных мишенях или с поляризованными пучками электронов. Следствием увеличения числа измеряемых переменных является усложнение характеристик функций отклика ядра. Например, дифференциальное сечение рассеяния электрона на ядре (e,e' X) с фиксацией направления вылета частицы X имеет вид

$$\frac{d^2\sigma(e,e')}{d\Omega_e d\Omega_p} = \frac{4\pi\sigma_M}{\eta_R}\left\{v_L W_L + v_T W_T + v_{TT} W_{TT} Cos 2\Phi + v_{TL} W_{TL} Cos\Phi\right\}. \tag{2.57}$$

Здесь Φ – угол между плоскостями векторов $\{\vec{\boldsymbol{k}}_1, \vec{\boldsymbol{k}}_2\}, \{\vec{\boldsymbol{q}}, \vec{\boldsymbol{p}}\}$ (См. рис.2.4)

$$v_L = (q_\mu^2 / q^2)^2; v_T = \frac{1}{2}(q_\mu^2 / q^2) + tg^2\frac{\theta}{2};$$

$$v_{TT} = -\frac{1}{2}(q_\mu^2 / q^2); v_{TL} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(q_\mu^2 / q^2)\sqrt{(q_\mu^2 / q^2) + tg^2\frac{\theta}{2}}.$$

В (2.57) $W_L = F_L^2, W_T = F_T^2$.

Физику эксклюзивного процесса определяют,помимо двух первых в формуле (2.57) еще два формфактора как функции структуры ядра :W_{TT}, W_{TL}. Таким образом, в случае совпадательных экспериментов сечение зависит не от 2, а от 4 структурных функций.

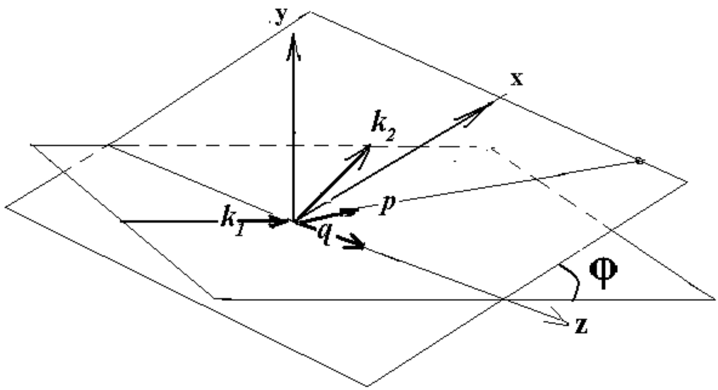

Рис.2.4. Кинематика эксклюзивных совпадательных экспериментов.

Эксперименты по схемам совпадений, например, $^{40}\mathrm{Ca}(e,e'x);\ x=p,\alpha$ позволяют избавиться от высокого радиационного фона экспериментов (e,e'), который затрудняет идентификацию мультипольности пиков электровозбуждения.