Правило сумм Томаса-Райха-Куна (ТРК) для электрических дипольных переходов в атомах

Для атома водорода (число электронов $Z = 1$)

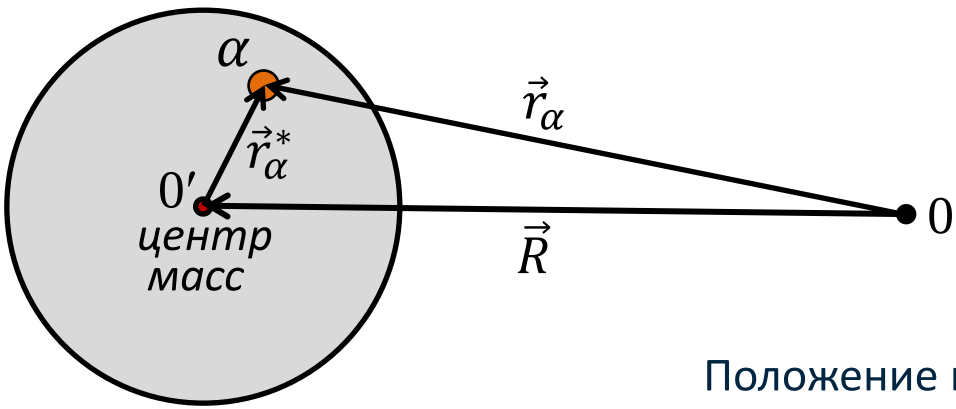
$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ат}} dE = \frac{2\pi^2 e^2 \hbar}{mc}$$

Для произвольного атома, содержащего Z электронов

$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ат}} dE = \frac{2\pi^2 e^2 \hbar}{mc} Z$$

Приложение правила сумм ТРК к атомным ядрам

Ядро



Электрический дипольный момент ядра в произвольной системе

$$\vec{\mathcal{D}} = \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha$$

$$e_\alpha = \begin{cases} e \text{ протоны} \\ 0 \text{ нейтроны} \end{cases}$$

Положение центра масс ядра $\vec{R} = \dfrac{1}{A}\sum_\alpha \vec{r}_\alpha$

Электрический дипольный момент ядра в его собственной системе

$$\vec{\mathcal{D}}^* = \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{R}) = \sum_\alpha^A e_\alpha \Big(\vec{r}_\alpha - \frac{1}{A}\sum_\beta^A \vec{r}_\beta\Big) = \sum_\alpha^A e_\alpha \vec{r}_\alpha - \frac{\sum_\alpha e_\alpha}{A}\sum_\beta^A \vec{r}_\beta =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha}_{\text{Только протоны}} - \underbrace{\frac{eZ}{A}\sum_\beta^A \vec{r}_\beta}_{\text{Все нуклоны}} = e\sum_{pp} \vec{r}_p - \frac{eZ}{A}\sum_{pp} \vec{r}_p - \frac{eZ}{A}\sum_{nn} \vec{r}_n = \frac{eN}{A}\sum_{pp} \vec{r}_p - \frac{eZ}{A}\sum_{nn} \vec{r}_n .$$

протоны   протоны   нейтроны

Итак, электрический дипольный момент
ядра в его собственной системе можно представить в виде

$$\vec{\mathcal{D}}^* = \frac{eN}{A}\underbrace{\sum_{pp}}_{\text{протоны}}\vec{r}_p - \frac{eZ}{A}\underbrace{\sum_{nn}}_{\text{нейтроны}}\vec{r}_n = \underbrace{\sum_{\alpha}^{A}\varepsilon_\alpha\vec{r}_\alpha}_{\text{Все нуклоны}},$$

где $$\boxed{\varepsilon_\alpha = \begin{cases} \dfrac{eN}{A} \approx +\dfrac{e}{2} & \text{протоны} \\ -\dfrac{eZ}{A} \approx -\dfrac{e}{2} & \text{нейтроны} \end{cases}}$$

Называют эффективными зарядами нуклонов

С помощью эффективных зарядов нуклонов электрический дипольный момент ядра в его собственной системе можно представить в стандартной форме – *в виде суммы произведений этих зарядов на их радиусы-векторы*.

Поскольку рассмотрение реакции объекта (в данном случае – ядра) на внешнее электромагнитное поле в его собственной системе координат (системе центра инерции объекта) отвечает внутреннему возбуждению этого объекта, то правило сумм ТРК можно применить и к ядру, если использовать в нем в качестве электрических зарядов нуклонов их эффективные заряды.

Преобразуем правило сумм ТРК для атома следующим образом

$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ат}} dE = \frac{2\pi^2 e^2 \hbar}{mc} Z = \frac{2\pi^2 \hbar}{mc} \sum_{i=1}^{Z} e_i^2,$$

где e_i – величина элементарного заряда, имеющего для атома и смысл эффективного заряда, поскольку речь идет о внутреннем ($E1$) возбуждении.

Очевидно, для любой квантовой системы зарядов с одинаковыми массами m, но разными электрическими зарядами, интегральное сечение поглощения $E1$-фотонов может быть представлено в виде

$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{любое}} dE = \frac{2\pi^2 \hbar}{mc} \sum_i \varepsilon_i^2,$$ где ε_i – эффективные заряды частиц системы.

Используя это обстоятельство и величины эффективных зарядов нуклонов, получим модификацию правила сумм ТРК для ядра, т. е. выражение для интегрального сечения поглощения ядром $E1$-фотонов:

$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ядро}} dE = \frac{2\pi^2 \hbar}{Mc} \sum_{\alpha=1}^{A} \varepsilon_\alpha^2 = \left[Z\left(\frac{eN}{A}\right)^2 + N\left(-\frac{eZ}{A}\right)^2 \right] = \frac{2\pi^2 e^2 \hbar}{Mc} \cdot \frac{NZ}{A}$$

масса нуклона

или

$$\boxed{\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ядро}} dE \approx 60 \frac{NZ}{A} \text{МэВ} \cdot \text{мб}}$$

Вернемся к выражению для электрического дипольного момента ядра в произвольной системе координат и преобразуем его, вводя в него координаты нуклонов в системе центра масс $\vec{r}_\alpha^{\,*}$ и положение центра масс ядра $\vec{R}$:

$$\vec{\mathcal{D}} = \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha\left(\vec{r}_\alpha^{\,*} + \vec{R}\right) = \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha^{\,*} + \left(\sum_\alpha e_\alpha\right)\vec{R} = \sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha^{\,*} + eZ\vec{R}.$$

Слагаемое $eZ\vec{R}$ это электрический дипольный момент ядра в произвольной системе координат как бесструктурной заряженной точки и оно отвечает за упругое рассеяние $E1$-фотонов на ядре как бесструктурном объекте, т. е. без его возбуждения и поглощения фотонов. Этот процесс носит название *томсоновского рассеяния*. $eZ\vec{R}$ можно представить в виде

$$eZ\vec{R} = \frac{eZ}{A}\sum_\alpha \vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha^{\text{т.р.}} \vec{r}_\alpha\,,$$ где для всех нуклонов величина $\varepsilon_\alpha^{\text{т.р.}} \equiv \dfrac{eZ}{A}$

играет роль эффективного заряда по отношению к томсоновскому рассеянию. Интегральное сечение томсоновского рассеяния дается выражением

$$\boxed{\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{т.р.}} dE = \frac{2\pi^2 e^2\hbar}{Mc}\cdot\frac{Z^2}{A}}$$

Полное интегральное сечение взаимодействия ядра с $E1$-фотонами следующее

$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ядро}} dE + \int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{т.р.}} dE = \frac{2\pi^2 e^2\hbar}{Mc}\left(\frac{NZ}{A} + \frac{Z^2}{A}\right) = \frac{2\pi^2 e^2\hbar}{Mc} Z\,.$$

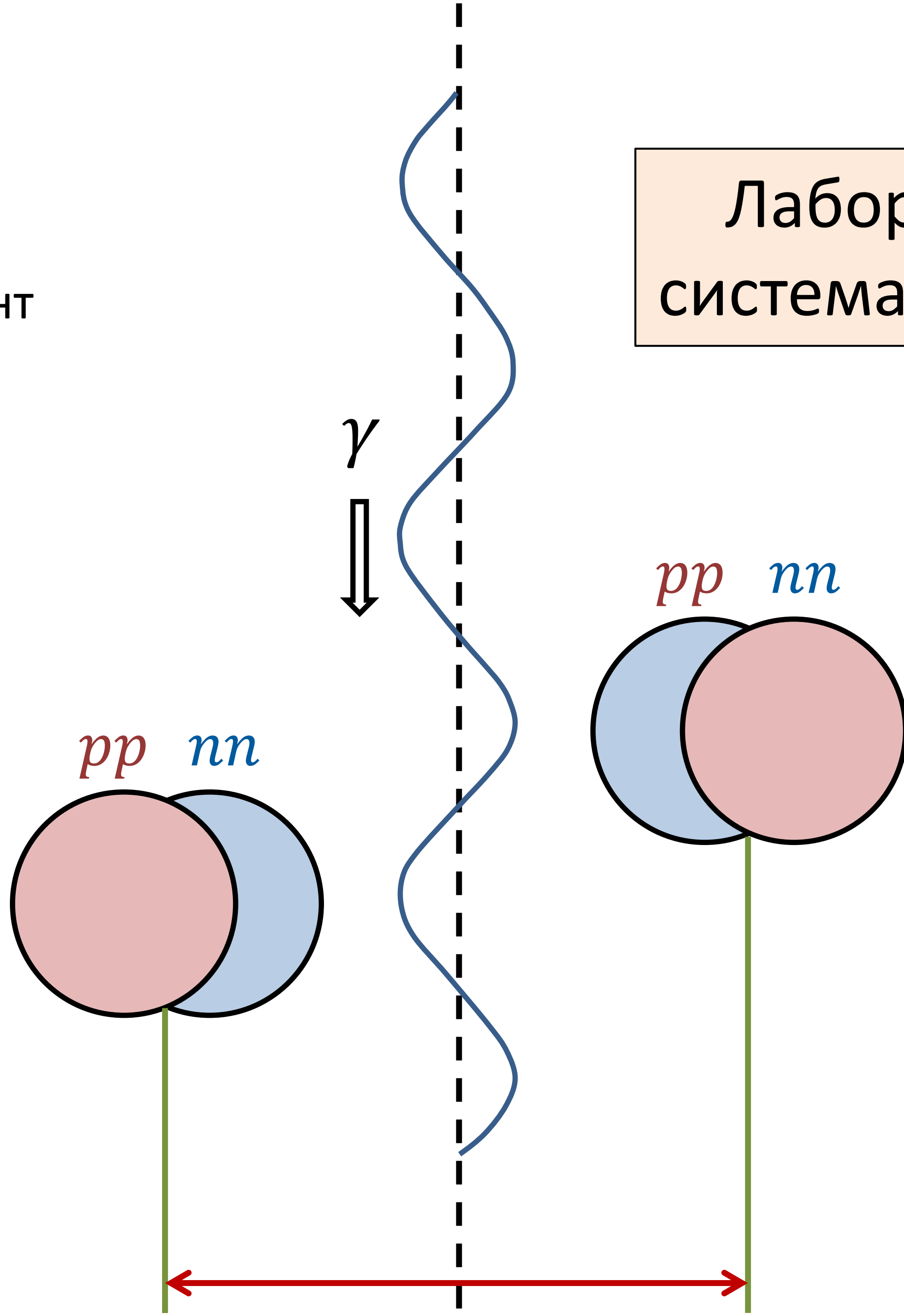
Т. е. получаем выражение, по форме совпадающее с исходным для атома.

Электрический
дипольный момент

$$\vec{\mathcal{D}} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

Истинные заряды

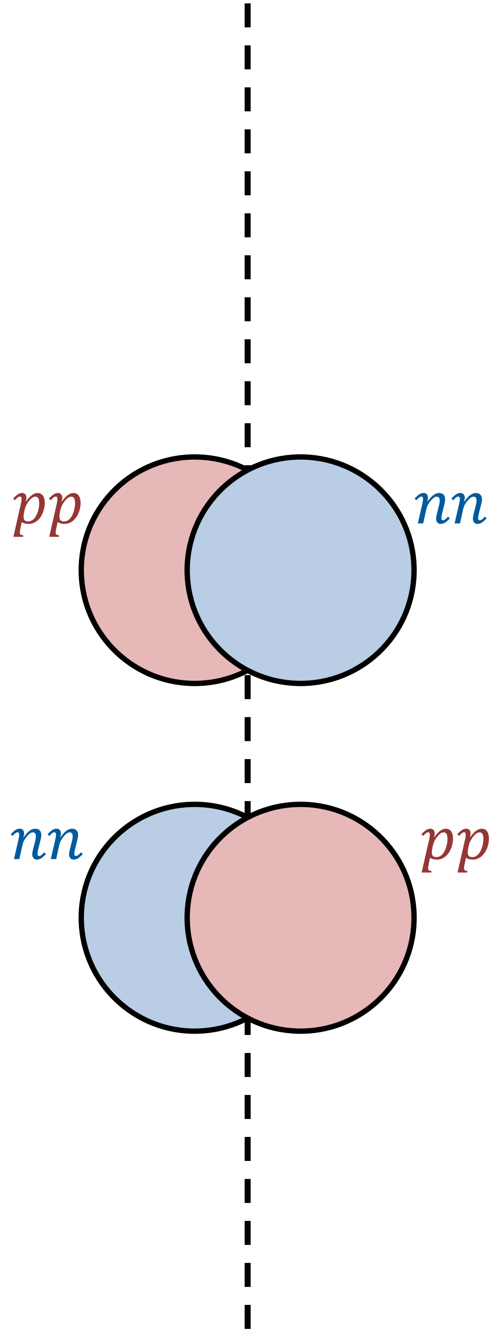
Лабораторная система координат



Электрический дипольный момент

$$\vec{\mathcal{D}}^{*} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \, ,$$

Эффективные заряды



Система центра инерции

Правило сумм Бете-Левинджера (Bethe-Levinger) для электрических дипольных переходов в атомных ядрах

При выводе правила сумм Томаса-Райха-Куна использовалось соотношение

$$\omega_{fi}\langle f|z_\alpha|i\rangle = \frac{1}{iM}\langle f|\hat{p}_{z_\alpha}|i\rangle.$$

Установим, в каком случае, преобразуя его левую часть без каких-либо дополнительных предположений, мы придем к правой.

$$\omega_{fi}\langle f|z_\alpha|i\rangle = \frac{1}{\hbar}\langle f|\left(E_f - E_i\right)z_\alpha|i\rangle = \frac{1}{\hbar}\left[\langle f|E_f z_\alpha|i\rangle - \langle f|E_i z_\alpha|i\rangle\right]$$

Далее, имея в виду, что структура гамильтониана системы в отсутствии внешних полей

$$H_0 = \sum_{\beta=1}^{A}\frac{\hat{\vec{p}}_\beta^{\,2}}{2M} + \widehat{W} \quad \text{и} \quad \langle f|E_i z_\alpha|i\rangle = \langle f|z_\alpha E_i|i\rangle = \langle f|z_\alpha H_0|i\rangle;$$

$$\langle f|E_f z_\alpha|i\rangle = \langle i|z_\alpha E_f|f\rangle^* = \langle i|z_\alpha H_0|f\rangle^* = \langle f|H_0 z_\alpha|i\rangle,$$

получаем $\omega_{fi}\langle f|z_\alpha|i\rangle = \frac{1}{\hbar}\langle f|H_0 z_\alpha - z_\alpha H_0|i\rangle = \frac{1}{\hbar}\langle f|[H_0, z_\alpha]|i\rangle =$

$$= \frac{1}{\hbar}\left\langle f\left|\left[\sum_\beta \frac{\hat{\vec{p}}_\beta^{\,2}}{2M}, z_\alpha\right]\right|i\right\rangle + \frac{1}{\hbar}\langle f|[\widehat{W}, z_\alpha]|i\rangle = \frac{1}{2M\hbar}\sum_\beta \langle f|[\hat{\vec{p}}_\beta^{\,2}, z_\alpha]|i\rangle + \frac{1}{\hbar}\langle f|[\widehat{W}, z_\alpha]|i\rangle.$$

Таким образом, величина $\omega_{fi}\langle f|z_\alpha|i\rangle$ свелась к двум коммутаторам:

$$\langle f|[\hat{\vec{p}}_\beta^2, z_\alpha]|i\rangle \text{ и } \langle f|[\widehat{W}, z_\alpha]|i\rangle.$$

Обозначим их кратко $[\hat{\vec{p}}_\beta^2, z_\alpha]$ и $[\widehat{W}, z_\alpha]$ и определим, чему они могут равняться.

Очевидно, $[\hat{\vec{p}}_\beta^2, z_\alpha] = 0$ при $\beta \neq \alpha$ и $[\hat{p}_{x_\alpha}^2, z_\alpha] = [\hat{p}_{y_\alpha}^2, z_\alpha] = 0$.

В то же время из квантовомеханического соотношения $[\hat{p}_z, z] = i\hbar$ можно получить

$$\frac{1}{2M}\langle f|[\hat{p}_{z_\alpha}^2, z_\alpha]|i\rangle = \frac{\hbar}{iM}\langle f|\hat{p}_{z_\alpha}|i\rangle.$$

Следовательно, убирая индекс α, имеем равенство

$$\omega_{fi}\langle f|z|i\rangle = \frac{1}{iM}\langle f|\hat{p}_z|i\rangle + \frac{1}{\hbar}\langle f|[\widehat{W}, z]|i\rangle.$$

Это точное соотношение. Раньше при выводе правила сумм ТРК мы использовали связь между матричными элементами от операторов координаты и импульса в усеченном виде $\omega_{fi}\langle f|z|i\rangle = \frac{1}{iM}\langle f|\hat{p}_z|i\rangle$, который, очевидно, может быть применим не ко всем квантовым системам, а только к тем, для которых коммутатор $[\widehat{W}, z] = 0$. Таким образом все зависит от сил между частицами системы, т .е. от вида потенциала $\widehat{W}$.

Очевидно, что если силы между частицами в системе зависят от скорости, то$\left[\widehat{W},x\right]\neq 0,\ \ \left[\widehat{W},y\right]\neq 0,\ \left[\widehat{W},z\right]\neq 0.$

Кроме того, этой коммутации нет и в том случае, если эти силы носят обменный характер. Покажем это:

Обменные силы между частицами с индексами α и β описываются потенциалом вида $\widetilde{W}_{\alpha\beta}=V\left(\left|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta\right|\right)\cdot\hat{P}_{\alpha\beta}$, где оператор $\hat{P}_{\alpha\beta}$ меняет частицы местами.

Вычислим коммутатор этих сил для частицы α, взаимодействующей с частицей β, ограничиваясь координатой z:

$$\left[\widetilde{W}_{\alpha\beta},z_\alpha\right]=V\hat{P}_{\alpha\beta}z_\alpha-z_\alpha V\hat{P}_{\alpha\beta}=\left(z_\beta-z_\alpha\right)V\hat{P}_{\alpha\beta}\neq 0,\ \ \text{так как } z_\beta\neq z_\alpha.$$

Силы между нуклонами в ядре являются как зависящими от скорости, так и имеющими обменный характер. Поэтому правило сумм для $E1$-возбуждений ядра требует уточнения.

Прежде всего модифицируем выражение для силы осциллятора перехода:

$$F_{fi}=\frac{2M}{\hbar}\,\omega_{fi}|\langle f|z|i\rangle|^2=\frac{M}{\hbar}\,\omega_{fi}[\langle i|z|f\rangle\langle f|z|i\rangle+\langle i|z|f\rangle\langle f|z|i\rangle]=$$

$$=\frac{M}{\hbar^2}[\langle i|z|f\rangle\langle f|[H_0,z]|i\rangle-\langle i|[H_0,z]|f\rangle\langle f|z|i\rangle].$$

Далее, суммируя F_{fi} по всем конечным состояниям, получаем для $\sum_f F_{fi}$ нижеследующие выражения, содержащие двойные коммутаторы:

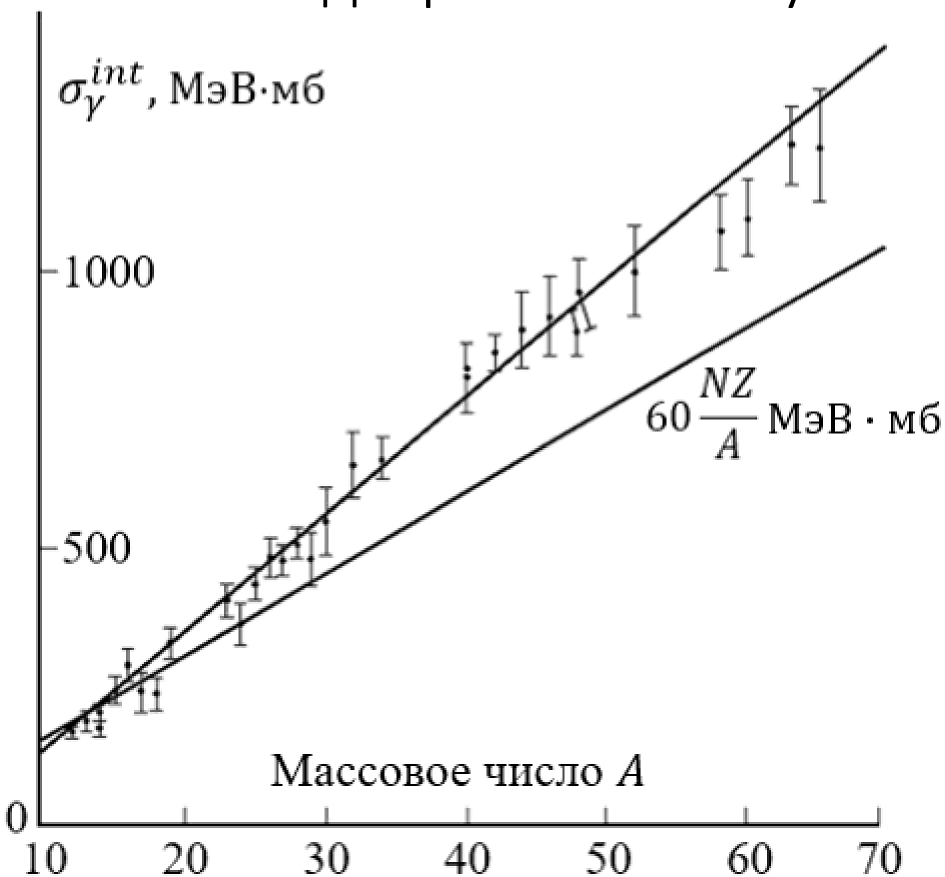
$$\sum_f F_{fi}=\frac{M}{\hbar^2}\langle i|\left[z,[H_0,z]\right]|i\rangle=\frac{1}{i\hbar}\langle i|[z,\hat{p}_z]|i\rangle+\frac{M}{\hbar^2}\left\langle i\left|\left[z,\left[\widehat{W},z\right]\right]\right|i\right\rangle.$$

$$\text{и}\qquad \sum_f F_{fi}=1+\underbrace{\frac{M}{\hbar^2}\left\langle i\left|\left[z,\left[\widehat{W},z\right]\right]\right|i\right\rangle}_{\delta}=1+\delta.$$

С учетом этого правило сумм для $E1$-переходов в атомных ядрах приобретает вид

$$\int_0^\infty \sigma_{E1}^{\text{ядро}} dE = \frac{2\pi^2\hbar}{Mc}\sum_{\alpha=1}^{A}\varepsilon_\alpha^2(1+\delta_\alpha) = \frac{2\pi^2 e^2\hbar}{Mc}\cdot\frac{NZ}{A}(1+\Delta),$$ где $\Delta = \sum_\alpha \delta_\alpha$

Это правило носит название ***правила сумм Бете-Левинджера.***
Для реальных межнуклонных сил $\Delta \approx 0{,}3 - 0{,}4$.



Сравнение теории и эксперимента для $E1$-переходов в ядрах с числом нуклонов до 70. Согласно этим данным $\Delta = 0{,}30 - 0{,}35$

Фоторасщепление дейтрона.
Сечение Бете-Пайерлса (Bethe-Peierls)

Дейтрон $\left({}^{2}_{1}\mathrm{H}\right)$ – простейшее ядро, способное поглотить фотон.
Поглощение дейтроном фотона приводит к его расщеплению

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c}\left|\langle f|\hat{v}|i\rangle\right|^2\rho_f$$

1. *Основное состояние дейтрона*

Полагаем, что в дейтроне между нуклонами действуют центральные силы нулевого радиуса. Тогда

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\frac{e^{-r/R}}{r}\,; \qquad R = \frac{\hbar}{\sqrt{M\Delta W}}$$ – радиус дейтрона

M – масса нуклона, ΔW – его энергия связи дейтрона (2,22 МэВ)

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}\,; \quad L = 0; \;\; S = 1; \;\; J = 1$$

$L = 0 \;\; \rightarrow S$

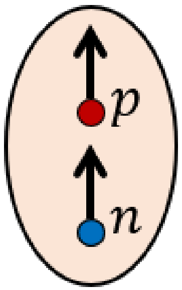
$L = 1 \;\; \rightarrow P$

$L = 2 \;\; \rightarrow D$

$$|i\rangle = {}^{3}S_{1}$$

96%

D – 4%



Состояние ядра в схеме LS-связи обозначают

$$\boxed{{}^{2S+1}L_J}$$

2. *Конечное состояние дейтрона*

$|f\rangle$ – состояние свободного движения протона относительно нейтрона (плоская волна)

$$\boxed{|f\rangle = Ae^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}}$$

$\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_n$; $\vec{p}$ – относительный импульс ($\vec{p} = \mu\frac{d\vec{r}}{dt}$);

$\mu = \frac{M}{2}$ – приведенная масса дейтрона

3. *Плотность конечных состояний*

Плотность конечных состояний, отвечающих свободному движению протона относительно нейтрона, находится с учетом ограничений, накладываемых условиями нормировки на волновую функцию конечного состояния $|f\rangle = Ae^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} = Ae^{i\vec{k}\vec{r}}$. Эту функцию нельзя нормировать условием $\int_0^\infty |\psi|^2 dV = 1$, так как

$$\int_0^\infty \left|e^{i\vec{k}\vec{r}}\right|^2 dV = \infty.$$

В этих случаях обеспечивают нормируемость функций путем определения их всех внутри большого объёма, заданного в виде куба с ребром l.
Условие нормировки в этом случае имеет вид

$$|A|^2 \int_0^{l^3} \left|e^{i\vec{k}\vec{r}}\right|^2 dV = 1\,, \qquad \text{откуда } A = \frac{1}{l^{3/2}}$$

При этом для проекций импульса имеем ряд дискретных значений

$$k_x = \frac{2\pi}{l} n_x,\ k_y = \frac{2\pi}{l} n_y,\ k_z = \frac{2\pi}{l} n_z, \text{ где } n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отсюда, полагая $l = 1$ и пересчитав все состояния в кубе единичного объема ($V = l^3 = 1$), получаем их плотность

$$\Delta\rho_f = \frac{dn}{dE} = \frac{dn_x dn_y dn_z}{dE} = \frac{dk_x dk_y dk_z}{dE(2\pi)^3} = \frac{k^2 dk d\Omega_k}{dE(2\pi)^3} = \frac{M\hbar k}{2} \cdot \boxed{\frac{d\Omega_k}{(2\pi\hbar)^3}}$$

Здесь учтено, что $E = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{(k\hbar)^2}{M}, \mu = \frac{M}{2},\ dE = \frac{2kdk \cdot \hbar^2}{M}$

4. Правила отбора

$$J_f = J_i \,, |J_i \pm 1| \,, P_f = -P_i$$

$\vec{\mathcal{D}} = \sum_{\alpha=1}^{A} e_\alpha \vec{r}_\alpha$ – скаляр в спиновом пространстве
и вектор в обычном пространстве

$$\vec{J}_i = \vec{S}_i + \vec{L}_i \,; \quad \vec{J}_f = \vec{S}_f + \vec{L}_f$$

Так как спиновое состояние при действии оператора $\sum_\alpha e_\alpha \vec{r}_\alpha$ на волновую функцию начального состояния не меняется,
то $\vec{S}_f = \vec{S}_i$ и

$$\Delta\vec{J} = \vec{J}_f - \vec{J}_i = \cancel{\vec{S}_f} - \cancel{\vec{S}_i} + \vec{L}_f - \vec{L}_i$$

$$\boxed{\text{Т. е.} \quad \Delta\vec{J} = \Delta\vec{L}}$$

Для дипольных переходов

$$J_f = J_i\,, |J_i \pm 1|$$

или

$$\Delta J = 0, \pm 1$$

Для переходов без изменения спина формально $\Delta J = \Delta L = 0, \pm 1$

При этом

исчезает
для $E1$-переходов

$$L_f = L_i, |L_i \pm 1|$$

Так как для $E1$-переходов чётность состояния меняется на противоположную: $P_f = -P_i$, то конечное состояние $L_f = L_i$ невозможно.

Окончательно для $E1$-переходов без изменения спина имеем

$$L_f = |L_i \pm 1| \text{ и } J_f = J_i, |J_i \pm 1|.$$

5. Уточнение конечного состояния дейтрона

$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} = e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{L=0}^{\infty} i^L \sqrt{4\pi(2L+1)}\, j_L(kr) Y_{L0}(\theta_{kr})$$

Правила отбора дают

$J_f = J_i, |J_i \pm 1|$; $S_f = S_i$; $L_f = |L_i \pm 1|$; $L_f \neq L_i$ из-за чётности

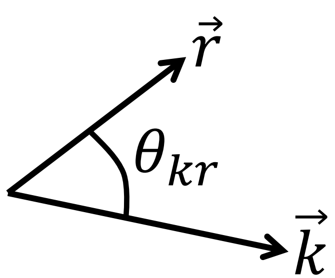
$$L_i = 0\,; \qquad S_i = 1; \qquad J_i = 1; \qquad P_i = +1$$

Так как $L_i = 0$, то $L_f = 1$; $\quad S_f = 1$; $\quad J_f = 0, 1, 2$; $\quad P_f = -1$.

Поэтому $\boxed{|f\rangle = {}^3P_{0,1,2}}$

и в разложении $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ остается одно слагаемое с $L = 1$:

$$|f\rangle_{E1} = i\sqrt{4\pi \cdot 3}\, j_1(kr) Y_{10}(\theta_{kr}).$$



Из свойств специальных функций:

$$Y_{10}(\theta_{kr}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta_{kr} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underbrace{\left(cos\theta_k cos\theta_r + sin\theta_k sin\theta_r cos(\varphi_k - \varphi_r)\right)}_{cos\theta_{kr}}$$

При этом $\int_0^{2\pi} cos(\varphi_k - \varphi_r) d\,\varphi_r = 0$

Таким образом, для конечного состояния окончательно имеем

$$|f\rangle_{E1} = 3i \underbrace{\boxed{\frac{1}{kr}\left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right)}}_{j_1(kr)} cos\theta_k cos\theta_r \; + \;\text{Нуль при дальнейшем интегрировании}$$

6. Оператор взаимодействия

Единичный вектор поляризации электромагнитной волны (фотона)

$$\hat{v}_{E1} = \vec{A}_0 \frac{E_f - E_i}{ic\hbar} \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha \vec{r}_\alpha = \frac{1}{i}\sqrt{2\pi\hbar\omega}\,\vec{\epsilon}\,\frac{e}{2}\underbrace{\left(\vec{r}_p - \vec{r}_n\right)}_{\vec{r}} = \frac{e}{2i}\sqrt{2\pi\hbar\omega}\,\vec{\epsilon}\cdot\vec{r}$$

$$\vec{A}_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}c\vec{\epsilon}; \quad \omega = \frac{E_f - E_i}{\hbar};$$

$$\varepsilon_p = \frac{e}{2};\ \varepsilon_n = -\frac{e}{2}.$$

Матричный элемент и сечение фоторасщепления дейтрона

$$\langle f|\hat{v}|i\rangle_{E1} = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\overbrace{-\frac{3i}{kr}\left(\frac{\sin kr}{kr}-\cos kr\right)cos\theta_k cos\theta_r}^{\text{Конечное состояние}}\right]\times$$

$$\times\underbrace{\frac{e}{2i}\sqrt{2\pi\hbar\omega}\,\vec{\epsilon}\cdot\vec{r}}_{\text{Оператор взаимодействия}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\frac{e^{-r/R}}{r}}_{\text{Начальное состояние}}\cdot\underbrace{r^2dr\cdot sin\theta_r d\theta_r\, d\varphi_r}_{\text{Элемент объёма}}.$$

После интегрирования: $\langle f|\hat{v}|i\rangle_{E1} = -4\pi e\sqrt{\frac{\hbar\omega}{R}}\frac{k}{(R^{-2}+k^2)^2}cos\theta_k$.

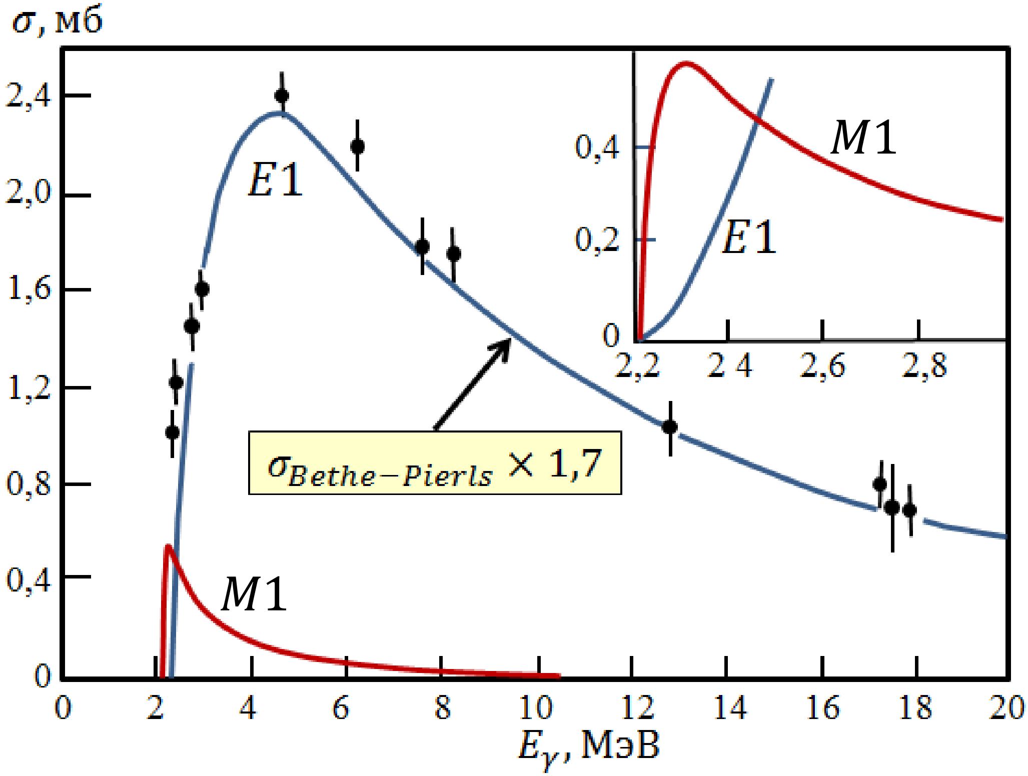
С учетом плотности конечных состояний и дальнейшего интегрирования по телесному углу $d\Omega_k$ получаем

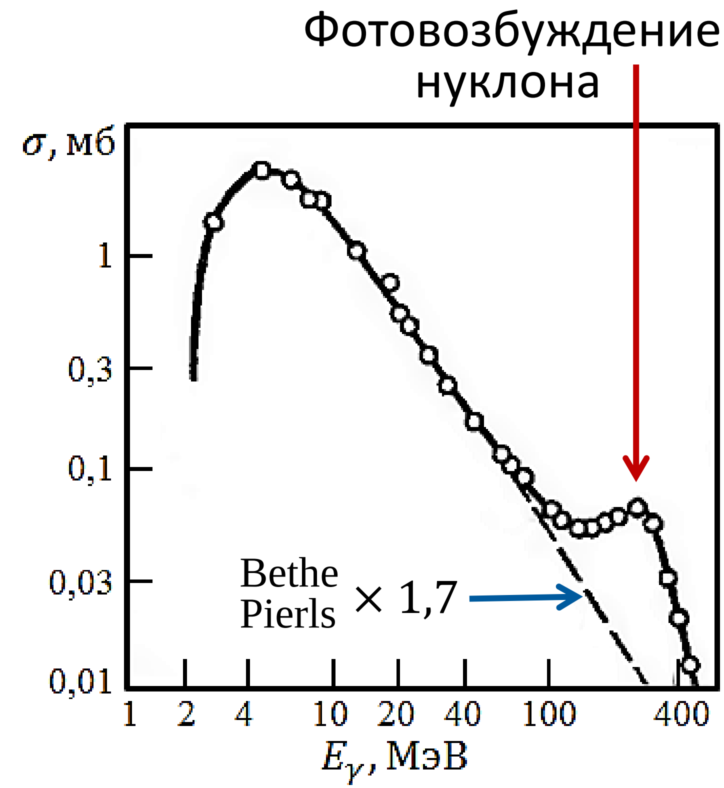
$$\sigma_{E1} = \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{e^2}{\hbar^2 c}\cdot\frac{M\omega}{R}\cdot\frac{k^3}{(R^{-2}+k^2)^4} = \boxed{\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{e^2\hbar}{Mc}\sqrt{\Delta W}\frac{(\hbar\omega-\Delta W)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3}}$$

Сечение Бете-Пайерлса, 1935 г.

$\Delta W = 2{,}22$ МэВ – энергия связи дейтрона

Сечение фоторасщепления дейтрона





Сечение Бете-Пайерлса получено в предположении:

1. Нулевого радиуса действия сил.
2. Основного состояния – как чистого S-состояния.
3. Отсутствия взаимодействия в конечном состоянии.