Курс лекций

Матрица плотности

Н. В. Никитин

Кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений

Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

2015 г.

Часть 1

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧИСТЫХ СОСТОЯНИЙ

Постулаты квантовой механики (для чистых состояний)

Квантовая механика основывается на наборе аксиом или постулатов. Справедливость этих постулатов может быть проверена только путем сравнения предсказаний квантовой теории с экспериментом. Имеется множество практически эквивалентных между собой наборов постулатов (обратите внимание на слово "практически"!).

Постулат N1. Квантовая система описывается при помощи вектора состояния $|\psi\rangle$ в конечномерном или бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Как правило, дополнительно предполагается, что вектор состояния $|\psi\rangle$ несет максимально возможную информацию о свойствах квантовой системы. Это предположение является до сих пор достаточно дискуссионным. Мы рассмотрим его подробнее, когда будем обсуждать квантовую энтропию.

Состояния микросистем, которые допускают описание в терминах векторов состояния $|\psi\rangle$, называются чистыми состояниями.

Постулат N2. Чистое состояние квантовой системы определяется только направлением вектора $|\,\psi\,\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, но не длиной самого вектора. Иначе, чистое состояние микросистемы задается лучом в гильбертовом пространстве.

Чтобы иметь возможность простейшим способом ввести в квантовую теорию понятие вероятности, удобно сразу положить норму $||\psi|| = 1$. То есть, для любого вектора $|\,\psi\,\rangle$, который описывает замкнутую (это важно!) микросистему, выполняется условие нормировки: $\langle\,\psi\,|\,\psi\,\rangle = 1$.

Из Постулата N1 и условия нормировки следует, что эволюция замкнутых квантовых систем во времени задается унитарным оператором. Действительно, если вектор $|\,\psi(t_0)\,\rangle$ полностью описывает состояние квантовой системы в начальный момент времени t_0, то в произвольный момент времени t имеем:

$$|\,\psi(t)\,\rangle = \hat{U}(t,\,t_0)\,|\,\psi(t_0)\,\rangle \qquad \text{и} \qquad \langle\,\psi(t)\,|\,\psi(t)\,\rangle = 1,$$

откуда сразу следует, что $\hat{U}(t,\,t_0)^\dagger\,\hat{U}(t,\,t_0) = \hat{1}$. Поскольку унитарный оператор обратим, то эволюция замкнутой квантовой системы обратима во времени.

Постулат N3 или **принцип суперпозиции**. Предположим, что микросистема до измерения описывалась вектором состояния $|\,\psi\,\rangle$. Пусть в результате измерения микросистема может перейти в одно из нескольких состояний, которые **различаются при помощи макропириборов** (возможно, для этого нужно выполнить несколько действий). Согласно **Постулату N1**, каждому такому состоянию следует сопоставить свой вектор $|\,\varphi_n\,\rangle$. Тогда $|\,\psi\,\rangle$ можно представить в виде линейной комбинации (**суперпозиции**) состояний $|\,\varphi_i\,\rangle$ по формуле:

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_i c_i\,|\,\varphi_i\,\rangle,$$

где c_i – набор комплексных чисел (и/или функций), которые определяются при помощи скалярного произведения

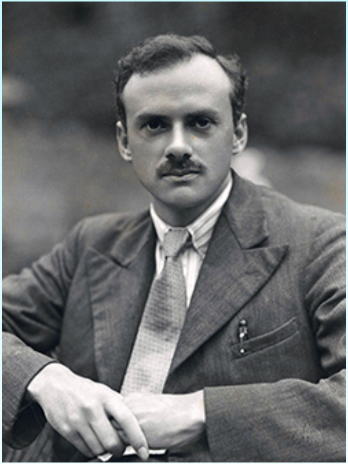
$$c_i = \langle\,\varphi_i\,|\,\psi\,\rangle.$$

Формулу для коэффициентов c_i можно получить сразу, если понять, что макроскопически различимые состояния микросистемы должны описываться ортогональными векторами состояния $|\,\varphi_n\,\rangle$. При этом набор $\{|\,\varphi_i\,\rangle\}$ не обязательно должен образовывать базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

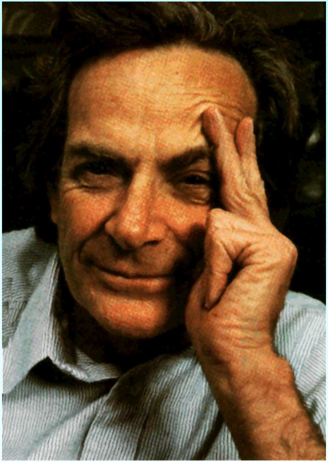
В прекрасных классических учебниках по квантовой механике, таких как книги П.А.М.Дирака "*Принципы квантовой механики*" и Д.И.Блохинцева "*Принципиальные вопросы квантовой механики*" (эти книги ОБЯЗАН прочесть любой студент, который предполагает связать свою жизнь с квантовой теорией!!!), утверждается, что именно принцип суперпозиции является краеугольным камнем квантового подхода к описанию Природы. Если бы квантовую физику можно было сформулировать исключительно в терминах векторов состояния, то это утверждение могло бы считаться правильным. Однако, это не так.

Ниже мы увидим, что более общая формулировка квантовой механики может быть дана в терминах матрицы плотности. В этой формулировке принцип суперпозиции выглядит весьма надумано. Кроме того, имеется фейнмановская формулировка с помощью интегралов по траекториям, в которой принцип суперпозиции играет достаточно второстепенную роль. Можно вспомнить томографическую формулировку (разрабатывается группой В.И.Манько). В этой формулировке принцип суперпозиции не используется.

Так какую же роль играет принцип суперпозиции? Скорее всего, этот принцип задает простейший вариант правил корреляции для состояний в микромире (граница Цирельсона), который выделяет квантовую теорию среди других возможных теорий, в том числе и классической физики.



Поль А.М. Дирак
(08.08.1902 – 20.10.1984)



Ричард Фейнман
(11.05.1918 – 15.02.1988)

Борис Семёнович
Цирельсон
(род. 04.05.1950)

Владимир Иванович
Манько
(род. 1940)

Постулат N4 о физическом смысле коэффициентов разложения c_i. В обозначениях Постулата N3 условная вероятность w_i найти микросистему ПОСЛЕ измерения в состоянии $|\,\varphi_i\,\rangle$ если ДО измерения она находилась в состоянии $|\,\psi\,\rangle$ задается формулой:

$$w_i = |c_i|^2 = \langle\,\psi\,|\,\varphi_i\,\rangle\,\langle\,\varphi_i\,|\,\psi\,\rangle \equiv \left\langle\,\psi\,\middle|\,\hat{P}_{\varphi_i}\,\middle|\,\psi\,\right\rangle = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi \hat{P}_{\varphi_i}\right),$$

где $\hat{P}_{\varphi_i} = |\,\varphi_i\,\rangle\,\langle\,\varphi_i\,|$ – проектор на чистое состояние $|\,\varphi_i\,\rangle$. Коэффициенты c_i носят название амплитуд вероятности нахождения системы в состоянии $|\,\varphi_i\,\rangle$. Происхождение данного термина очевидно из формулировки Постулата N4.

В литературе Постулат N4 носит название проекционного постулата Макса Борна по имени немецкого физика-теоретика, который в 1926 году первым предложил вероятностное толкование коэффициентов c_i в принципе суперпозиции (Нобелевская премия по физике за 1954 год).

Постулат N4 предлагает алгоритм сравнения предсказаний квантовой механики с экспериментом, то есть открывает возможность количественной проверки квантовой теории.

Пусть свойства микросистемы характеризуются некоторой наблюдаемой величиной A. Стандартный эксперимент заключается в том, что при многократном измерении наблюдаемой на множестве идентичных квантовых систем, каждой из которых сопоставлен вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$, с вероятностью w_1 будет найдено значение a_1, с вероятностью w_2 – значение a_2 и так далее.

Постулат N5 или **постулат о соответствии наблюдаемых величин и операторов**. Любая микросистема обладает хотя бы одной экспериментально измеряемой физической величиной, которая для краткости называется **наблюдаемой**. Наблюдаемой A ставится в соответствие **эрмитов оператор** $\hat{A}$, собственные значения $\{a_i\}$ которого численно совпадают со всеми возможными результатами измерения наблюдаемой A. Тогда среднее значение этой наблюдаемой в любом допустимом микросостоянии $|\,\psi\,\rangle$ определяется по формуле:

$$\langle\, A\,\rangle_\psi = \left\langle\, \psi \,\middle|\, \hat{A} \,\middle|\, \psi \,\right\rangle = \mathbf{Tr}\left(\hat{P}_\psi\, \hat{A}\right).$$

Легко показать, что **вероятность измерения** конкретного значения a_n наблюдаемой A согласно квантовой теории равна $w_n = |c_n|^2$, где $\{c_i\}$ – набор коэффициентов разложения состояния $|\,\psi\,\rangle$ по собственным векторам $\{|\,a_i\,\rangle\}$ эрмитового оператора $\hat{A}$.

Пусть квантовая система описывается при помощи гамильтониана $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$. Разбиение гамильтониана зависит от используемого временнóго представления. Например, в **представлении Шредингера** $\hat{H}_1 = \hat{H}^{(S)}$ и $\hat{H}_2 = 0$, в **представлении Гейзенберга** $\hat{H}_1 = 0$ и $\hat{H}_2 = \hat{H}^{(H)}$, а в **представлении взаимодействия** $\hat{H}_1 = \hat{V}^{(I)}$ – оператор "возмущения" и $\hat{H}_2 = \hat{H}_0^{(I)}$ – оператор "невозмущенной системы". Зависимость или независимость $\hat{H}_{1,\,2}$ от времени также определяется выбором представления и конкретной задачи.

Постулат N6 об эволюции квантовой системы во времени. Если зависящее от времени среднее значение наблюдаемой A задается выражением

$$\langle A \rangle_\psi (t) \equiv \left\langle \psi(t) \middle| \hat{A}(t) \middle| \psi(t) \right\rangle.$$

то эволюция операторов и векторов состояния квантовой системы определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \,|\, \psi(t) \,\rangle}{\partial t} = \hat{H}_1 \,|\, \psi(t) \,\rangle \\ i\hbar \dfrac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = \left[\hat{A}(t),\, \hat{H}_2 \right]. \end{cases}$$

Для конкретных вычислений чаще всего пользуются представлением Шредингера. В этом представлении операторы явно от времени не зависят, а временна́я эволюция векторов состояния $\left| \psi^{(S)}(t) \right\rangle$ определяется уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \left| \psi^{(S)}(t) \right\rangle}{\partial t} = \hat{H}^{(S)} \left| \psi^{(S)}(t) \right\rangle$$

с начальным условием $\left| \psi^{(S)}(t = t_0) \right\rangle = \left| \psi_0^{(S)} \right\rangle$. Линейность уравнения Шредингера не противоречит Постулату N1 и Постулату N3 (принципу суперпозиции).

Решение этого уравнения удобно искать при помощи оператора эволюции $\hat{U}(t,\, t_0)$ в виде:

$$\left| \psi^{(S)}(t) \right\rangle = \hat{U}(t,\, t_0) \left| \psi_0^{(S)} \right\rangle.$$

Оператор эволюции обладает следующими свойствами:

$$\hat{U}(t,\, t_0)\, \hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0) = \hat{U}^{\dagger}(t,\, t_0)\, \hat{U}(t,\, t_0) = \hat{1}, \quad \hat{U}(t_0,\, t_0) = \hat{1}$$

и $\hat{U}(t_1,\, t_3) = \hat{U}(t_1,\, t_2)\, \hat{U}(t_2,\, t_3)$ (групповое свойство).

Постулат N7 о производной оператора по времени. В произвольном представлении сопоставим оператору $\hat{A}$ наблюдаемой A новый оператор $\hat{B}$ на совокупности состояний $|\,\psi\,\rangle$ по правилу:

$$\langle\, B\,\rangle_\psi\,(t) \;\equiv\; \frac{d}{dt}\,\Big(\langle\, A\,\rangle_\psi\,(t)\Big)$$

Тогда оператор $\hat{B}$ называется **производной оператора $\hat{A}$ по времени** и (не вполне удачно!) обозначается как $\hat{B} \equiv \dfrac{d\,\hat{A}}{dt}$. В данном случае обозначение в правой части равенства **следует понимать как ЕДИНЫЙ оператор**!!!

Оператор $\hat{B}$ существует даже тогда, когда оператор $\hat{A}$ явно от времени не зависит. Например, в представлении Шредингера:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\langle\, A\,\rangle_\psi\,(t) \quad &= \quad \frac{d}{dt}\left\langle\, \psi^{(S)}(t)\,\middle|\,\hat{A}^{(S)}\,\middle|\,\psi^{(S)}(t)\,\right\rangle = \left(\frac{d\left\langle\,\psi^{(S)}(t)\,\right|}{dt}\right)\hat{A}^{(S)}\left|\,\psi^{(S)}(t)\,\right\rangle + \\ &+ \quad \left\langle\,\psi^{(S)}(t)\,\right|\hat{A}^{(S)}\,\left(\frac{d\left|\,\psi^{(S)}(t)\,\right\rangle}{dt}\right) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}^{(S)},\hat{A}^{(S)}\right].\end{aligned}$$

Таким образом $\left(\dfrac{d\,\hat{A}}{dt}\right)^{(S)} = \dfrac{i}{\hbar}\left[\hat{H}^{(S)},\hat{A}^{(S)}\right].$

Теорема о невозможности клонирования произвольного чистого состояния

Пусть Аленушка ($\equiv$ Алиса) хочет передать некоторую информацию Братцуиванушке ($\equiv$ Бобу) при помощи вектора состояния $|\,\psi\,\rangle$. Теорема утверждает, что перехватившая это сообщение злобная Егабаба ($\equiv$ Ева) никогда не сможет создать себе его точную копию так, чтобы о несанкционированном перехвате не узнали Аленушка и Братециванушка.

Действительно, чтобы Аленушка и Братециванушка не догадались о перехвате сообщения, Егабаба должа уметь из одного ПРОИЗВОЛЬНОГО вектора состояния $|\,\psi\,\rangle$ делать как минимум два абсолютно идентичных вектора, чтобы одну копию оставить себе для последующей дешифровки, а другую отослать Братцуиванушке, чтобы он не догадался о факте перехвата. Такой процесс называется клонированием вектора состояния.

Для доказательства предположим, что вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ представляет собой суперпозицию двух векторов состояния $|\,\varphi_1\,\rangle$ и $|\,\varphi_1\,\rangle$, то есть

$$|\,\psi\,\rangle = C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle.$$

Предположим, что процедура клонирования существует, и пусть эта процедура из произвольного вектора состояния $|\,\phi\,\rangle$ и “пустого” вектора состояния $|\,0\,\rangle$ делает две копии вектора $|\,\phi\,\rangle$, то есть:

$$|\,\phi\,\rangle\;|\,0\,\rangle\;\rightarrow\;|\,\phi\,\rangle\;|\,\phi\,\rangle.$$

С одной стороны, мы можем применить процедуру клонирования непосредственно к вектору $|\,\psi\,\rangle$. Это дает

$$|\,\psi\,\rangle\;|\,0\,\rangle \rightarrow |\,\psi\,\rangle\;|\,\psi\,\rangle = \Big(C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\Big)\times\Big(C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\Big) =$$

$$= C_1^2\,|\,\varphi_1\,\rangle|\,\varphi_1\,\rangle + C_2^2\,|\,\varphi_2\,\rangle|\,\varphi_2\,\rangle + C_1C_2\Big(|\,\varphi_1\,\rangle|\,\varphi_2\,\rangle + |\,\varphi_2\,\rangle|\,\varphi_1\,\rangle\Big).$$

С другой стороны, гипотетическую операцию клонирования можно применить к каждому из векторов линейной комбинации. В этом случае:

$$|\,\psi\,\rangle|\,0\,\rangle = C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle|\,0\,\rangle + C_2\;|\,\varphi_2\,\rangle|\,0\,\rangle \rightarrow C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle|\,\varphi_1\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle|\,\varphi_2\,\rangle.$$

Если операция клонирования самосогласованна, то оба результата должны совпадать. Но из-за наличия дополнительного интерференционного слагаемого в первом случае, совпадение обоих способов клонирования состояния $|\,\psi\,\rangle$ возможно только при условии $C_1 = C_2 = 0$. В остальных случаях операция клонирования **НЕ согласуется** с **принципом суперпозиции** (**Постулатом N3**). Теорема доказана.

Первооткрыватели "No-cloning theorem"

W.H.Zurek

W.Wootters

Хотя вычисления, ведущие к доказательству теоремы о невозможности клонирования (по-английски *"No-cloning theorem"*), доступны любому студенту, но сама теорема была доказана только в 1982 году (больше чем через полвека после создания квантовой механики!) и опубликована в журнале Nature:
W. K. Wootters and W. H. Zurek, "A Single Quantum Cannot Be Cloned,"Nature 299, p.802 (1982).

Совместное клонирование ортогональных состояний

В теореме о невозможности клонирования ключевую роль играет, что вектор состояния НЕИЗВЕСТЕН. Известный вектор клонировать можно!

Если известен вектор состояния $|\psi\rangle$, то можно найти ортогональные ему вектора. То есть эти вектора тоже известны и, следовательно, их можно клонировать наряду с вектором $|\psi\rangle$. Более того, клонирование может осуществляться одним и тем же унитарным оператором. Действительно, пусть $\hat{U}$ – искомый унитарный оператор. Рассмотрим два состояния $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$, для которых осуществляется операция клонирования. Тогда:

$$\hat{U}\,|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$$
$$\hat{U}\,|\varphi\rangle|0\rangle = |\varphi\rangle|\varphi\rangle$$

Теперь скалярно умножим одно равенство на другое. Получим:

$$|\langle\psi|\,\varphi\rangle|^2 = \langle 0|\left\langle\psi\left|\,\hat{U}^\dagger\hat{U}\,\right|\varphi\right\rangle|0\rangle = \langle\psi|\,\varphi\rangle\,\langle 0|\,0\rangle = \langle\psi|\,\varphi\rangle.$$

То есть необходимо решить уравнение $|x|^2 = x$, где $x = \langle\psi|\,\varphi\rangle$. Имеется два решения. Первое: $x = 1$ ведет к равенству $|\varphi\rangle \equiv |\psi\rangle$. Второе: $x = 0$ означает, что $|\varphi\rangle = \left|\psi^{(\perp)}\right\rangle$. Утверждение доказано.

Отсюда следует, что макроскопическую информацию всегда можно копировать, поскольку вектора состояния двух даже одинаковых с виду макрообъектов ортогональны.

Теорема о невозможности уничтожения копии произвольного чистого состояния

Для “No-cloning theorem” существует, в некотором смысле, обратная теорема *о невозможности уничтожения одной из копий произвольного чистого состояния* (так называемая “No-deleting theorem”). Ключевыми в названии теоремы являются слова “одна из копий” и “произвольного”, поскольку, очевидно, что любое чистое состояние можно уничтожить, например, произведя над ним измерение.

Напомним, что в результате измерения вектор состояния $|\,\psi\,\rangle$ переходит в один из векторов $|\,\varphi_j\,\rangle$. Говорят, что произошла РЕДУКЦИЯ или “стягивание” вектора $|\,\psi\,\rangle$ к вектору $|\,\varphi_j\,\rangle$. Очевидно, что процесс редукции необратим, поскольку в результате редукции полностью теряется информация о всех (комплексных) коэффициентах разложения c_i, которые входят в принцип суперпозиции.

Как сочетается такая необратимость с обратимыми дифференциальными уравнениями эволюции из Постулата N6? Очевидным образом. Уравнения эволюции написаны для замкнутых квантовых систем. А измерение подразумевает, что квантовая система становится открытой, в ней меняются энтропия и информация. Поэтому уравнения из Постулата N6 к процессу измерения непосредственно не применимы.

Условие теоремы гласит, что если имеются две копии неизвестного чистого состояния, то невозможно удалить одну из копий так, чтобы другая осталась нетронутой. Иначе говоря, **невозможен процесс**:

$$|\phi\rangle\,|\phi\rangle \to |\phi\rangle\,|0\rangle.$$

Для доказательства рассмотри некоторое чистое состояние

$$|\psi\rangle = C_1\,|\varphi_1\rangle + C_2\,|\varphi_2\rangle,$$

которое разложено по базису $|\varphi_i\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. Коэффициенты C_1 и C_2 подчиняются стандартному условию нормировки

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

Для предания смысла принципу суперпозиции, дополнительно потребуем, чтобы $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$. В остальном коэффициенты C_1 и C_2 являются абсолютно **произвольными**.

Предположим, что существует процедура уничтожения одной из копий произвольного чистого состояния. Тогда применим эту процедуру к вектору $|\,\psi\,\rangle$. Получим:

$$|\,\psi\,\rangle\,|\,\psi\,\rangle \to |\,\psi\,\rangle\,|\,0\,\rangle \to C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,0\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,0\,\rangle.$$

Далее рассмотрим $|\,\psi\,\rangle$ как линейную комбинацию $|\,\varphi_1\,\rangle$ и $|\,\varphi_2\,\rangle$ и применим процедуру уничтожения к произведению линейных комбинаций:

$$\begin{aligned}|\,\psi\,\rangle|\,\psi\,\rangle \quad &= \quad C_1^2\,|\,\varphi_1\,\rangle|\,\varphi_1\,\rangle + C_2^2\,|\,\varphi_2\,\rangle|\,\varphi_2\,\rangle + C_1C_2\,(|\,\varphi_1\,\rangle|\,\varphi_2\,\rangle + |\,\varphi_2\,\rangle|\,\varphi_1\,\rangle) \to \\ &\to \quad C_1^2\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,0\,\rangle + C_2^2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,0\,\rangle + \sqrt{2}\,C_1C_2\,|\,\Phi\,\rangle,\end{aligned}$$

где $|\,\Phi\,\rangle$ – некоторое вспомогательное состояние, которое не должно зависеть от коэффициентов C_1 и C_2.

Найдем, при каких условиях оба выражения совпадают. Для этого решаем уравнение:

$$\mathrm{const} \times \Big(C_1\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,0\,\rangle + C_2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,0\,\rangle\Big) = C_1^2\,|\,\varphi_1\,\rangle\,|\,0\,\rangle + C_2^2\,|\,\varphi_2\,\rangle\,|\,0\,\rangle + \sqrt{2}C_1C_2\,|\,\Phi\,\rangle.$$

Оно превращается в тождество, если

$$\mathrm{const} = C_1 + C_2 \quad \text{и} \quad |\,\Phi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\,\varphi_1\,\rangle + |\,\varphi_2\,\rangle\Big)\,|\,0\,\rangle.$$

Заметим, что если $\mathrm{const} = 0$ (то есть, $C_1 = -C_2$), то результаты двух представленных выше версий процедур уничтожения не возможно согласовать друг с другом. То есть процедура уничтожения становится в этом случае противоречивой. Таким образом, например, копию состояния

$$\left|\, \chi^{(1)} \right\rangle = \left|\, \psi\Big(C_1 = {}^1\!/\!\sqrt{2},\ C_2 = -{}^1\!/\!\sqrt{2} \Big) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\left|\, \varphi_1 \right\rangle - \left|\, \varphi_2 \right\rangle \Big)$$

уничтожить нельзя. Теперь рассмотрим уничтожение одной из копий чистого состояния

$$\left|\, \psi^{(\perp)} \right\rangle = C_2^* \left|\, \varphi_1 \right\rangle - C_1^* \left|\, \varphi_2 \right\rangle.$$

Применим искомую процедуру к самому вектору

$$\left|\, \psi^{(\perp)} \right\rangle \left|\, \psi^{(\perp)} \right\rangle \to \left|\, \psi^{(\perp)} \right\rangle \left|\, 0 \right\rangle \to C_2^* \left|\, \varphi_1 \right\rangle \left|\, 0 \right\rangle - C_1^* \left|\, \varphi_2 \right\rangle \left|\, 0 \right\rangle$$

и к его разложению в суперпозицию

$$\begin{aligned} \left|\, \psi^{(\perp)} \right\rangle \left|\, \psi^{(\perp)} \right\rangle &= \Big(C_2^* \Big)^2 \left|\, \varphi_1 \right\rangle \left|\, \varphi_1 \right\rangle + \Big(C_1^* \Big)^2 \left|\, \varphi_2 \right\rangle \left|\, \varphi_2 \right\rangle - \\ &- C_1^* C_2^* \Big(\left|\, \varphi_1 \right\rangle \left|\, \varphi_2 \right\rangle + \left|\, \varphi_2 \right\rangle \left|\, \varphi_1 \right\rangle \Big) \to \\ &\to \Big(C_2^* \Big)^2 \left|\, \varphi_1 \right\rangle \left|\, 0 \right\rangle + \Big(C_1^* \Big)^2 \left|\, \varphi_2 \right\rangle \left|\, 0 \right\rangle - \sqrt{2}\, C_1^* C_2^* \left|\, \Phi \right\rangle, \end{aligned}$$

где состояние $\left|\, \Phi \right\rangle$ должно быть точно таким же, как и выше.

Результаты обеих процедур уничтожения согласуются, если выбрать

$$\mathbf{const} = C_2^* - C_1^*.$$

Исключением является случай, когда $\mathbf{const} = 0$, то есть когда $C_2^* = C_1^*$ или $C_1 = C_2$. Для такого выбора констант процедура уничтожения неопределена. Поэтому **копию** состояния

$$\left|\,\chi^{(2)}\,\right\rangle = \left|\,\psi\left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\, C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|\,\varphi_1\,\rangle + |\,\varphi_2\,\rangle\,\right)$$

невозможно уничтожить также, как и копию состояния $\left|\,\chi^{(1)}\,\right\rangle$.

Состояния $\left|\,\chi^{(1)}\,\right\rangle$ и $\left|\,\chi^{(2)}\,\right\rangle$ являются базисом в двумерном гильбертовом пространстве. Следовательно, любое состояние $|\,\phi\,\rangle$ можно разложить по этому базису

$$|\,\phi\,\rangle = \alpha\left|\,\chi^{(1)}\,\right\rangle + \beta\left|\,\chi^{(2)}\,\right\rangle,$$

где α и β – коэффициенты разложения, удовлетворяющие условию нормировки

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Для завершения доказательства применим процедуру уничтожения к $|\phi\rangle|\phi\rangle$. С одной стороны она должна давать

$$|\phi\rangle\,|\phi\rangle \to |\phi\rangle\,|0\rangle = \left(\alpha\left|\chi^{(1)}\right\rangle + \beta\left|\chi^{(2)}\right\rangle\right)|0\rangle.$$

С другой стороны, эта процедура невыполнима, поскольку

$$|\phi\rangle\,|\phi\rangle = \alpha^2\left|\chi^{(1)}\right\rangle\left|\chi^{(1)}\right\rangle + \beta^2\left|\chi^{(2)}\right\rangle\left|\chi^{(2)}\right\rangle +$$

$$+\alpha\,\beta\left(\left|\chi^{(1)}\right\rangle\left|\chi^{(2)}\right\rangle + \left|\chi^{(2)}\right\rangle\left|\chi^{(1)}\right\rangle\right) \to ?,$$

а, как было доказано выше, уничтожение копий состояния $\left|\chi^{(1)}\right\rangle$ и $\left|\chi^{(2)}\right\rangle$ невозможно. Получили противоречие.

Таким образом невозможно уничтожить копию ни одного НЕИЗВЕСТНОГО чистого состояния $|\phi\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. Рассмотрение многомерного случая аналогично двумерному. Следовательно, теорема доказана. Заметим, что известные состояния можно уничтожать (точно также, как и клонировать).

Люди, доказавшие “No-deleting theorem”

Arun Kumar Pati
род. в 1966 г.

Samuel Leon Braunstein
род. в 1961 г.

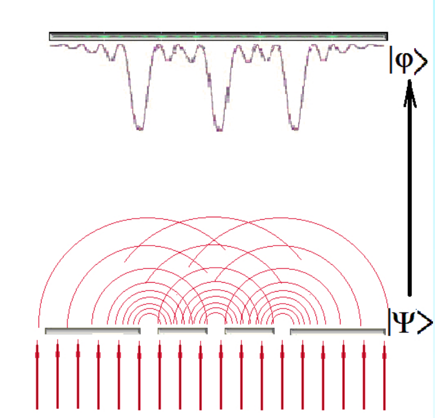
Доказательство было опубликована в журнале “Nature” спустя 18 лет после доказательства “No-cloning theorem”: A. K. Pati and S. L. Braunstein, Nature 404, p.164 (2000).

Правила суперотбора

Принцип суперпозиции не накладывает никаких ограничений на разложения состояния $|\psi\rangle$ по состояниям $|\varphi_i\rangle$. Однако, все ли такие разложения имеют физический смысл и могут быть реализованы в реальных микросистемах?

Впервые данный вопрос был сформулирован в работе: G.C.Wick, A.S.Wightman and E.P.Wigner, "The intrinsic parity of elementary particles", Phys. Rev. 88, p.101, 1952. Там же дан и ответ: не все состояния микросистемы, которые можно записать при помощи принципа суперпозиции, имеют физический смысл и реализуются в Природе.

Рассмотрим красивый пример. Пусть монохроматический пучок света низкой интенсивности (будем считать, что в каждый момент времени на экран падает только один фотон) проходит сквозь непрозрачный экран с ТРЕМЯ щелями (обычно в учебниках рассматривают эксперименты с двумя щелями; в данном примере щелей три). За этим экраном на некотором расстоянии L находится еще один экран, на котором можно наблюдать интерференционную картину.



Прохождению фотона через первую щель непрозрачного экрана сопоставим базисный вектор $|1\rangle$, через вторую – вектор $|2\rangle$, а через третью – вектор $|3\rangle$. Если пучок достаточно однороден, то вектор состояния фотонов сразу после прохождения экрана с тремя щелями можно написать в виде:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle\right).$$

На пути от первого экрана до второго фотоны интерферируют друг с другом. Результат интерференции, естественно, зависит от взаимного расположения щелей и расстояния между экранами. Предположим, что мы подобрали расположение щелей и экранов таким образом, что интерференционная картина на втором экране соответствует вектору состояния

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle - |2\rangle + |3\rangle\right).$$

Условная вероятность возникновения этого состояния оказывается вполне значимой: $w(\varphi|\psi) = 1/3$.

Теперь поставим около щели "3" детектор фотонов и переставим экраны так, чтобы вектор состояния $|\varphi\rangle$ не изменился. Принцип суперпозиции как и любой другой постулат квантовой теории не запрещает этого делать. Тогда с какой вероятностью в получившейся конфигурации мы зарегистрируем, что фотон прошел через третью щель? Простые вычисления дают:

$$w_3 = 1 - \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\varphi|\left(|1\rangle + |2\rangle\right)\right|^2 = 1 - 0 = 1,$$

то есть фотон всегда будет проходить через щель "3"! Но если фотон всегда проходит через одну щель, как же тогда может возникнуть интерференция?

Однако на этом сюрпризы не заканчиваются. Поместим теперь детектор фотонов перед щелью “1” и зададимся тем же самым вопросом про вероятность прохождения фотонов. Рассуждая аналогично получим, что $w_1 = 1$! Поскольку суммарная вероятность пройти фотону сквозь любую из трех щелей тоже равна единице, то приходим к очередному парадоксальному выводу, что вероятность прохождения фотона через вторую щель $w_2 = 1 - w_1 - w_3 = -1$. То есть мы получили отрицательную вероятность, которую не возможно измерить экспериментально!

Данный результат можно интерпретировать следующим образом: хотя указанная нами “экспериментальная” ситуация формально не противоречит ни одному из постулатов квантовой теории, но, на самом деле, она ни в одном эксперименте не может быть реализована. Следовательно, должны быть введены дополнительные правила суперотбора, которые бы запрещали такую ситуацию. Например, правило, что в природе не возможны такие конфигурации макроприборов, которые приводят к отрицательным вероятностям для наблюдаемых величин. Заметим, что для одновременно НЕнаблюдаемых величин совместные вероятности в квантовой механике могут быть отрицательными. Но такие вероятности не могут быть измерены, а, потому, не имеют физического смысла.